CORRECTION
Préparer ma rentrée mathématiques en 1ère STI2D

Lycée Robert Doisneau

à Corbeil-Essonnes

1er Juillet 2022 - 30 Août 2022

Exercice 1

a) $\frac{11}{9} + \frac{10}{9} = \frac{21}{9}$

$= \frac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3} \times 3}$

$= \frac{7}{3}$

b) $\frac{15}{17} - \frac{6}{17} = \frac{9}{17}$

c) $\frac{5}{28} - \frac{12}{28} = -\frac{7}{28}$

$= -\frac{\cancel{7} \times 1}{\cancel{7} \times 4}$

$= -\frac{1}{4}$

d) $\frac{4}{3} + \frac{9}{8} = \frac{4 \times 8}{3 \times 8} + \frac{9 \times 3}{8 \times 3}$

$= \frac{32}{24} + \frac{27}{24}$

$= \frac{59}{24}$

e) $\frac{7}{3} - \frac{5}{4} = \frac{7 \times 4}{3 \times 4} - \frac{5 \times 3}{4 \times 3}$

$= \frac{28}{12} - \frac{15}{12}$

$= \frac{13}{12}$

f) $\frac{8}{5} - \frac{1}{9} = \frac{8 \times 9}{5 \times 9} - \frac{1 \times 5}{9 \times 5}$

$= \frac{72}{45} - \frac{5}{45}$

$= \frac{67}{45}$

g) $\frac{8}{3} \times \frac{7}{16} = \frac{8 \times 7}{3 \times 16}$

$= \frac{\cancel{8} \times 7}{3 \times \cancel{8} \times 2}$

$= \frac{7}{6}$

h) $\frac{1}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1 \times 2}{8 \times 7}$

$= \frac{1 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 4 \times 7}$

$= \frac{1}{28}$

i) $\frac{7}{6} + \frac{3}{8} = \frac{7 \times 4}{6 \times 4} + \frac{3 \times 3}{8 \times 3}$

$= \frac{28}{24} + \frac{9}{24}$

$= \frac{37}{24}$

j) $\frac{2}{7} + \frac{8}{3} = \frac{2 \times 3}{7 \times 3} + \frac{8 \times 7}{3 \times 7}$

$= \frac{6}{21} + \frac{56}{21}$

$= \frac{62}{21}$

k) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{9}} = \frac{4}{7} \times \frac{9}{16}$

$= \frac{4 \times 9}{7 \times 16}$

$= \frac{\cancel{4} \times 9}{7 \times 4 \times \cancel{4}}$

$= \frac{9}{28}$

l) $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{9} \times \frac{5}{2}$

$= \frac{\cancel{2} \times 5}{9 \times \cancel{2}}$

$= \frac{5}{9}$

Exercice 2

a) $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$

b) $-\frac{8}{7} > -\frac{9}{7}$

c) $\frac{9}{2} > \frac{6}{5}$

d) $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$

e) $-\frac{9}{2} < -\frac{2}{3}$

f) $-\frac{3}{7} > -\frac{7}{9}$

Exercice 3

a) $$4 + \frac{3}{x+2} = \frac{4(x+2)+3}{x+2}$$

$$= \frac{4x+8+3}{x+2}$$

$$= \frac{4x+8}{x+2}$$

b) $$\frac{2x}{x+1} - 5 = \frac{2x-5(x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{2x-5x-5}{x+1}$$

$$= \frac{-3x-5}{x+1}$$

c) $$\frac{4}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{4(x+2)+x+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{4x+8+x+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{5x+9}{(x+1)(x+2)}$$

d) $$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-3(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{4x+2-3x+3}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{x+5}{(x-1)(2x+1)}$$

Exercice 4

a) $88 = 2^3 \times 11$

b) $94 = 2 \times 47$

c) $175 = 5^2 \times 7$

d) $64^5 = (2^6)^5$
$= 2^{6\times5}$
$= 2^{30}$

e) $27^4 = (3^3)^4$
$= 3^{3\times4}$
$= 3^{12}$

f) $125^7 = (5^3)^7$
$= 5^{3\times7}$
$= 5^{21}$

g) $48\times54 = 2^3\times3\times2\times3^3$
$= 2^{3+1}\times3^{3+1}$
$= 2^4\times3^4$

h) $75^4\times27^8 = (3\times5^2)^4\times(3^3)^8$
$= 3^4\times(5^2)^4\times3^{3\times8}$
$= 3^4\times5^{2\times4}\times3^{24}$
$= 3^{24+4}\times5^8$
$= 3^{28}\times5^8$

i) $30^2\times12^3\times60^4 = (3\times2\times5)^2\times(3\times2^2)^3\times(3\times2^2\times5)^4$
$= 3^2\times2^2\times5^2\times3^3\times(2^2)^3\times3^4\times(2^2)^4\times5^4$
$= 3^{2+3+4}\times5^{2+4}\times2^2\times2^{2\times3}\times2^{2\times4}$
$= 3^9\times5^6\times2^2\times2^6\times2^8$
$= 2^{2+6+8}\times3^9\times5^6$
$= 2^{16}\times3^9\times5^6$

j) $\frac{42}{56} = \frac{\cancel{2}\times3\times\cancel{7}}{\cancel{2}\times2\times2\times\cancel{7}}$

$= \frac{3}{4}$

k) $\frac{72}{63} = \frac{\cancel{7}\times7}{\cancel{7}\times9}$

$= \frac{7}{9}$

l) $\frac{75^8}{15^4} = \frac{(15\times5)^8}{15^4}$

$= \frac{15^8\times5^8}{15^4}$

$= \frac{15^4\times\cancel{15^4}\times5^8}{\cancel{15^4}}$

$= (5\times3)^4\times5^8$
$= 5^4\times3^4\times5^8$
$= 5^{4+8}\times3^4$
$= 5^{12}\times3^4$

m) $\frac{12^5}{3^4\times2^{11}} = \frac{(2^2\times3)^5}{3^4\times2^{11}}$

$= \frac{(2^2)^5\times3^5}{3^4\times2^{11}}$

$= \frac{2^{2\times5}\times3^5}{3^4\times2^{11}}$

$= \frac{2^{10}\times3^5}{3^4\times2^{11}}$

$= 2^{10-11}\times3^{5-4}$
$= 2^{-1}\times3^1$

n) $\frac{36^5}{8^3\times27^4} = \frac{(2^2\times3^2)^5}{(2^3)^3\times(3^3)^4}$

$= \frac{(2^2)^5\times(3^2)^5}{2^{3\times3}\times3^{3\times4}}$

$= \frac{2^{2\times5}\times3^{2\times5}}{2^9\times3^{12}}$

$= \frac{2^{10}\times3^{10}}{2^9\times3^{12}}$

$= 2^{10-9}\times3^{10-12}$
$= 2^1\times3^{-2}$

o) $8\times(7\times5)^5\times\frac{5^2\times7^2}{7^4\times5^5}\times(7^{-2})^2 = 2^3\times7^5\times5^5\times5^{2-3}\times7^{2-4}\times7^{-2\times2}$
$= 2^3\times7^5\times5^5\times5^{-1}\times7^{-2}\times7^{-4}$
$= 2^3\times7^{5-2-4}\times5^{5-1}$
$= 2^3\times7^{-1}\times5^4$

p) $9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{5\times2^2}{(3^2\times2)^4} = 3^2\times\frac{2^2}{3^2}\times\frac{5\times2^2}{(3^2)^4\times2^4}$

$= 3^{2-2}\times2^{2+2-4}\times\frac{5}{3^{2\times4}}$

$= \frac{5}{3^8}$

$= 5\times3^{-8}$

Exercice 5

1) a) $\frac{121}{\sqrt{11}} = \frac{121 \times \sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}}$

$= \frac{121\sqrt{11}}{11}$

$= 11\sqrt{11}$

b) $\frac{70}{\sqrt{5}} = \frac{70 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

$= \frac{70\sqrt{5}}{5}$

$= 14\sqrt{5}$

c) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{2}$

d) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3 \times \sqrt{15}}{\sqrt{15} \times \sqrt{15}}$

$= \frac{3\sqrt{15}}{15}$

$= \frac{\sqrt{15}}{5}$

e) $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \frac{2\sqrt{6}}{6}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}$

2) a) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3}$

b) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$

$= \sqrt{36} \times \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

c) $\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5}$

$= \sqrt{36} \times \sqrt{5}$

$= 6\sqrt{5}$

$108 = 9 \times 12$

$= 36 \times 3$

d) $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3}$

$= \sqrt{36} \times \sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

e) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$

$= \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$

f) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$

$= \sqrt{16} \times \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

Exercice 6

a) $16 < 21 < 25$ donc $\sqrt{16} < \sqrt{21} < \sqrt{25}$

donc $4 < \sqrt{21} < 5$

b) $100 < 102 < 121$ donc $\sqrt{100} < \sqrt{102} < \sqrt{121}$

donc $10 < \sqrt{102} < 11$

c) $36 < 40 < 49$ donc $\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$

donc $6 < \sqrt{40} < 7$

d) $9 < 13 < 16$ donc $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$

donc $3 < \sqrt{13} < 4$

e) $49 < 61 < 64$ donc $\sqrt{49} < \sqrt{61} < \sqrt{64}$

donc $7 < \sqrt{61} < 8$

f) $81 < 99 < 100$ donc $\sqrt{81} < \sqrt{99} < \sqrt{100}$

donc $9 < \sqrt{99} < 10$

Exercice 7

a) $2\sqrt{27} - \sqrt{12} = 2\sqrt{9\times3} - \sqrt{4\times3}$

$= 2\sqrt{9}\sqrt{3} - \sqrt{4}\sqrt{3}$

$= 2\times3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}.$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{5} + \sqrt{4\times5}$

$= \sqrt{5} + \sqrt{4}\sqrt{5}$

$= \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5}$

c) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{4\times2} - \sqrt{2}$

$= \sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

d) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4\times2}$

$= \sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2}$

$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4\times3} - \sqrt{3}$

$= \sqrt{4}\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

Exercice 8

1) $$\frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1\times(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)\times(\sqrt{3}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3-4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{-1}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

2)a) $$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2\times(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{7}}{9-7}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{7}}{2}$$

$$= 3-\sqrt{7}$$

b) $$\frac{2}{4-\sqrt{13}} = \frac{2\times(4+\sqrt{13})}{(4-\sqrt{13})\times(4+\sqrt{13})}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{13}}{16-13}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{13}}{3}$$

c) $$\frac{1+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})\times(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})\times(2+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2+\sqrt{5}+2\sqrt{5}+5}{4-5}$$

$$= \frac{7+3\sqrt{5}}{-1}$$

$$= -7-3\sqrt{5}$$

Exercice 9

1) $h(3) = -5 \times 3 + 2$

$= -13$

2) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$h(x) = -8 \iff -5x + 2 = -8$

$\iff -5x = -10$

$\iff x = 2$

3) $h(-1) = -5 \times (-1) + 2$

$= 7$

$\neq -3$

Ainsi $E \notin \mathcal{C}_h$.

4) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$h(x) = 1 \iff -5x + 2 = 1$

$\iff -5x = -1$

$\iff x = \frac{1}{5}$

l'abscisse de G est $\frac{1}{5}$.

5) $h(0) = -5 \times 0 + 2$

$= 2$

Ainsi $\mathcal{C}_h$ coupe l'axe des ordonnées en $(0;2)$

Exercice 10

1) $h\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} + 3$

$= \frac{7}{3}$

2) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$h(x) = 2 \iff -x + 3 = 2$

$\iff -x = -1$

$\iff x = 1$

3) $h(-1) = 1 + 3$

$= 4$

$\neq -4$

Ainsi, $E \notin \mathcal{C}_h$.

4) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$h(x) = 7 \iff -x + 3 = 7$

$\iff -x = 4$

$\iff x = -4$

5) $h(0) = 3$

Ainsi $\mathcal{C}_h$ coupe l'axe des abscisses en $(0\,;3)$

Exercice 11

1) f est définie si $x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3$

Ainsi $D_f = [-3;+\infty[$

2) $f(6) = \sqrt{6+3} + 1$

$= \sqrt{9} + 1$

$= 3+1$

$= 4$

3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$f(x) = 1 \iff \sqrt{x+3} + 1 = 1$

$\iff \sqrt{x+3} = 0$

$\iff x+3 = 0$

$\iff x = -3.$

4) $f(22) = \sqrt{22+3} + 1$

$= \sqrt{25} + 1$

$= 5 + 1$

$= 6$

$\neq 5$

$A \notin \mathcal{C}_f$

Exercice 12

1)a) Si $x = 3$, $f(x) = f(3)$

$$= 3^2 - 6$$
$$= 9 - 6$$
$$= 3$$

Faux

b) Si $x = -1$, $f(x) = f(-1)$

$$= (-1)^2 - 6$$
$$= -5$$

Faux

c) Si $f(x) = 16$ alors $x^2 - 6 = 16$

$$x^2 = 22$$
$$x = -\sqrt{22} \text{ ou } x = \sqrt{22}$$

Faux

d) $f(-2) = (-2)^2 - 6$

$$= 4 - 6$$
$$= -2$$
$$\neq -4$$

Faux.

2) $f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 6$

$$= 5 - 6$$
$$= -1$$

3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \pi \iff x^2 - 6 = \pi$$
$$\iff x^2 = 6 + \pi$$
$$\iff x = -\sqrt{6+\pi} \text{ ou } x = \sqrt{6+\pi}.$$

Exercice 13

1) f est définie si $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$

2) $f(-2) = \frac{3\times(-2)-2}{-2-1}$

$= \frac{-6-2}{-3}$

$= \frac{8}{3}$

3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$f(x) = 5 \iff \frac{3x-2}{x-1} = 5$

$\iff \frac{3x-2}{x-1} - 5 = 0$

$\iff \frac{3x-2-5(x-1)}{x-1} = 0$

$\iff \frac{3x-2-5x+5}{x-1} = 0$

$\iff \frac{-2x+3}{x-1} = 0$

$\iff -2x+3=0$ et $x-1 \neq 0$

$\iff -2x=-3$ et $x \neq 1$

$\iff x = \frac{3}{2}$ et $x \neq 1$

$\iff x = \frac{3}{2}$

4) $f(-1) = \frac{3\times(-1)-2}{-1-1}$

$= \frac{-3-2}{-2}$

$= \frac{5}{2}$

$E \notin \mathcal{C}_f$

5) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$f(x) = -1 \iff \frac{3x-2}{x-1} = -1$

$\iff \frac{3x-2}{x-1} + 1 = 0$

$\iff \frac{3x-2+x-1}{x-1} = 0$

$\iff \frac{4x-3}{x-1} = 0$

$\iff 4x-3=0$ et $x-1 \neq 0$

$\iff 4x=3$ et $x \neq 1$

$\iff x = \frac{3}{4}$ et $x \neq 1$

$\iff x = \frac{3}{4}$

6) $f(0) = \frac{3\times 0 - 2}{0-1}$

$= 2$

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $(0;2)$.

Exercice 14

a) $2(a+4) = 2a + 8$

b) $-4(6-x) = -24+4x$

$= 4x-24$

c) $(11x-7)\times 5 = 55x-35$

d) $10(5a-3) = 50a-30$

e) $(-3x+8)\times(-7) = 21x-56$

f) $5(5x^2-3x+4) = 25x^2-15x+20$

g) $a(20-2b+a) = 20a-2ab+a^2$

h) $(71x-41)\times x = 71x^2-41x$

i) $(2x^2-5x+6)\times(-4x) = -8x^3+20x^2-24x$

j) $12\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\right) = 3x^2+2x-4$

Exercice 15

a) $(2x+1)(3x-4) = 6x^2 - 8x + 3x - 4$

$= 6x^2 - 5x - 4$

b) $(x^2+3)(1-3x) = x^2 - 3x^3 + 3 - 9x$

$= -3x^3 + x^2 - 9x + 3$

c) $(3a+2b)(-a-5b) = -3a^2 - 15ab - 2ab - 10b^2$

$= -3a^2 - 17ab - 10b^2$

d) $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

e) $(5x-y)(3y+x) = 15xy + 5x^2 - 3y^2 - xy$

$= 5x^2 + 14xy - 3y^2$

f) $(8x+24)\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) = 2x^2 - x + 6x - 3$

$= 2x^2 + 5x - 3$

g) $\frac{1}{3}(39x - 11)(5x+3) = \left(13x - \frac{11}{3}\right)(5x+3)$

$= 65x^2 + 39x - \frac{55}{3}x - 11$

$= 65x^2 + \frac{62}{3}x - 11$

h) $\left(\frac{2x}{7} + \frac{1}{5}\right)(14 - 35x) = 4x - 10x^2 + \frac{14}{5} - 7x$

$= -10x^2 - 3x + \frac{14}{5}$

Exercice 16

a) $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$

b) $(9-b)^2 = 81 - 18b + b^2$

$= b^2 - 18b + 81$

c) $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$

d) $(10-x)(10+x) = 100 - x^2$

$= -x^2 + 100$

e) $(8x-6)^2 = 64x^2 - 96x + 36$

f) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$

$= 5 - 3$

$= 2$

g) $(11+3x)^2 = 121 + 66x + 9x^2$

$= 9x^2 + 66x + 121$

h) $(\sqrt{3}+\sqrt{27})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{27} + (\sqrt{27})^2$

$= 3 + 2 \times \sqrt{81} + 27$

$= 30 + 2 \times 9$

$= 48$

i) $\left(\frac{x}{3} - 3\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{x}{3}\right) \times 3 + 3^2$

$= \frac{x^2}{9} - 2x + 9$

j) $\left(\frac{5x}{12} + 6\right)^2 = \left(\frac{5x}{12}\right)^2 + 2 \times \frac{5x}{12} \times 6 + 36$

$= \frac{25x^2}{144} + 5x + 36$

Exercice 17

a) $3a - 6b + 12 = 3 \times a - 3 \times 2b + 3 \times 4$
$= 3(a - 2b + 4)$

b) $5x^2 + 3x = x \times 5x + x \times 3$
$= x(5x+3)$

c) $36a^2 - 24b + 12c = 12 \times 3a^2 - 12 \times 2b + 12 \times c$
$= 12(3a^2 - 2b + c)$

d) $7x - 49x^2 = 7x \times 1 - 7x \times 7x$
$= 7x(1 - 7x)$

e) $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b = \frac{1}{3} \times a + \frac{1}{3} \times 2b$

$= \frac{1}{3}(a + 2b)$

f) $\sqrt{2}x - 5\sqrt{2} = \sqrt{2} \times x - \sqrt{2} \times 5$
$= \sqrt{2}(x - 5)$

g) $(x-2)(3a-b) + (x-2)(7a+2b-3) = (x-2)(3a-b+7a+2b-3)$
$= (x-2)(10a+b-3)$

h) $(7x-4)(10x+1) - (-3x+7)(7x-4) = (7x-4)((10x+1)-(-3x+7))$
$= (7x-4)(10x+1+3x-7)$
$= (7x-4)(13x-6)$

Exercice 18

a) $16a^2 - 9b^2 = (4a)^2 - (3b)^2$

$= (4a-3b)(4a+3b)$

b) $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2\times 2x \times 3 + 3^2$

$= (2x-3)^2$

c) $25x^2 - 20x + 4 = (5x)^2 - 2\times 5x \times 2 + 2^2$

$= (5x-2)^2$

d) $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2\times 3x \times 2 + 2^2$

$= (3x+2)^2$

e) $144x^2 - 49y^2 = (12x)^2 - (7y)^2$

$= (12x-7y)(12x+7y)$

f) $\frac{9}{4}x^2 - 3x + 1 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2\times \frac{3}{2}x \times 1 + 1^2$

$= \left(\frac{3}{2}x - 1\right)^2$

g) $9x^2 + 18x + 9 = (3x)^2 + 2\times 3x \times 3 + 3^2$

$= (3x+3)^2$

h) $121x^2 + 220x + 100 = (11x)^2 + 2\times 11x \times 10 + 10^2$

$= (11x+10)^2$

i) $144 - 16x^2 = 12^2 - (4x)^2$

$= (12-4x)(12+4x)$

j) $1 - \frac{25}{36}x^2 = 1^2 - \left(\frac{5}{6}x\right)^2$

$= \left(1 - \frac{5}{6}x\right)\left(1 + \frac{5}{6}x\right)$

Exercice 19

a) $f(x+h) = 5(x+h) - 3$

$= 5x + 5h - 3$

b) $f(x+h) = -10(x+h) + 6$

$= -10x - 10h + 6$

c) $f(x+h) = (x+h)^2$

$= x^2 + 2xh + h^2$

d) $f(x+h) = -2(x+h)^2 + 1$

$= -2(x^2 + 2xh + h^2) + 1$

$= -2x^2 - 4xh - 2h^2 + 1$

e) $f(x+h) = (x+h+2)^2$

$= (x+h)^2 + 2\times(x+h)\times 2 + 4$

$= x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h + 4$

f) $f(x+h) = (x+h)^2 + x+h + 1$

$= x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1$

Exercice 20

a) $f(x+h) - f(x) = 9(x+h)+1-(9x+1)$

$= 9x+9h+1-9x-1$

$= 9h$

b) $f(x+h) - f(x) = (2(x+h)-4)^2 - (2x-4)^2$

$= (2x+2h-4)^2 - 4x^2 + 16x - 16$

$= (2x+2h)^2 - 2(2x+2h)\times 4 + 16 - 4x^2 + 16x - 16$

$= 4x^2 + 8xh + 4h^2 - 16x - 16h - 4x^2 + 16x$

$= 4h^2 - 16h + 8xh$

c) $f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$

$= \frac{x - x - h}{x(x+h)}$

$= \frac{-h}{x(x+h)}$

d) $f(x+h) - f(x) = 6(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 - (6x^2 - 4x + 3)$

$= 6(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 3 - 6x^2 + 4x - 3$

$= 6x^2 + 12xh + h^2 - 4h - 6x^2$

$= h^2 - 4h + 12xh$

Exercice 21

a) $1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$

b) $1 + \frac{67}{100} = 1{,}67$

c) $1 - \frac{75}{100} = 0{,}25$

d) $1 + \frac{33}{100} = 1{,}33$

e) $1 - \frac{5}{100} = 0{,}95$

f) $1 - \frac{43}{100} = 0{,}57$

Exercice 22

a) $t = CM - 1$

$= 1{,}62 - 1$

$= 0{,}62$

soit une évolution de 62% (augmentation)

b) $t = CM - 1$

$= 1{,}8 - 1$

$= 0{,}8$

soit une évolution de 80% (augmentation)

c) $t = CM - 1$

$= 0{,}4 - 1$

$= -0{,}6$

soit une évolution de -60% (diminution)

d) $t = CM - 1$

$= 0{,}27 - 1$

$= -0{,}73$

soit une évolution de -73% (diminution)

e) $t = CM - 1$

$= 1{,}59 - 1$

$= 0{,}59$

soit une évolution de 59% (augmentation)

f) $t = CM - 1$

$= 0{,}2 - 1$

$= -0{,}8$

soit une évolution de -80% (diminution)

g) $t = CM - 1$

$= 3 - 1$

$= 2$

soit une évolution de 200% (augmentation)

Exercice 23

a) $450\left(1+\frac{10}{100}\right) = 450 \times 1{,}1$
$= 495$

La valeur finale sera de 495€.

b) Le coefficient directeur est $1-\frac{30}{100} = 0{,}7$.

$30 \times 0{,}7 = 21$

Le pull sera à 21€.

c) Cela revient à multiplier par 0,88.

d) Cela revient à multiplier par 1,37.

Exercice 24

a) Sa production de porte-clés en février sera

$300 \times 1,12 = 336$

b) Sa production de porte-clés en mars sera

$336 \times 1,12 \simeq 376$

c) La production dépassera 700 porte-clés dans 8 ans.

Exercice 25

1) L'ensemble de définition de f est $[-8\,;7]$.

2) a) $f(6) = 3$

b) $f(-6) = 2$

c) $f(-8) = 6$

d) $f(-4) = -5$

e) $f(-2) = 1$

f) $f(0) = -2$

g) $f(3) = -2$

3) a) $f(x) = -2 \iff x \in \{-5\,;-3\,;0\,;3\}$.

b) $f(x) = 0 \iff x \in \{-5{,}5\,;-2{,}5\,;-1\,;5\}$

c) $f(x) = 8 \iff x = 7$

d) $f(x) = -5 \iff x \in \{-4\,;2\}$.

4) $A \in \mathcal{C}_f$

5) $B \notin \mathcal{C}_f$

6)

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -8 & & -4 & & -2 & & 2 & & 7 \\
\hline
 & 6 & & & & 1 & & & & \\
\text{Variations de } f & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & -5 & & & & -5 & & \\
\end{array}
$$

Exercice 26

1) $f(-2) = 0$

2) $f(2) = -4$

3) -4 a exactement deux antécédents par f.

4)

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 27

1) $f(4) = -10$

2)

x	$-\infty$		-3		-2		1		4		$+\infty$
Variations de f		↗	-3	↘	$\simeq -3{,}2$	↗	$\simeq 1{,}3$	↘	-10	↗	

Exercice 28

1) L'ensemble de définition de f est $[-8\,;7]$.

2) a) $f(-8) = -3$

b) $f(-4) = 3$

c) $f(0) = -4$

d) $f(2) = 4$.

3) a) $f(x) = 4 \iff x = 2$

b) $f(x) = 1 \iff x \in \{-5{,}5\,;\ -3{,}3\,;\ 1{,}1\,;\ 2{,}8\,;\ 5{,}2\}$

c) $f(x) = -3 \iff x \in \{-8\,;\ -1\,;\ 0{,}5\}$

4) a) $A \notin \mathcal{C}_f$

b) $B \notin \mathcal{C}_f$

c) $C \notin \mathcal{C}_f$

d) $D \notin \mathcal{C}_f$

e) $E \notin \mathcal{C}_f$

f) $F \notin \mathcal{C}_f$

5)

x	-8		-6		-3		1		3		5		7
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

6)

x	-8		-4		0		2		4		6		7
Variations de f	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Exercice 29

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{4-2}{1-0}$$

$$= 2$$

$p = 2$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$

Exercice 30

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{2 - 3}{2 - 0}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$p = 3$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Exercice 31

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{4 - 3}{2 - 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$p = 3$

Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

Exercice 32

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{1 - 3}{1 - 0}$$

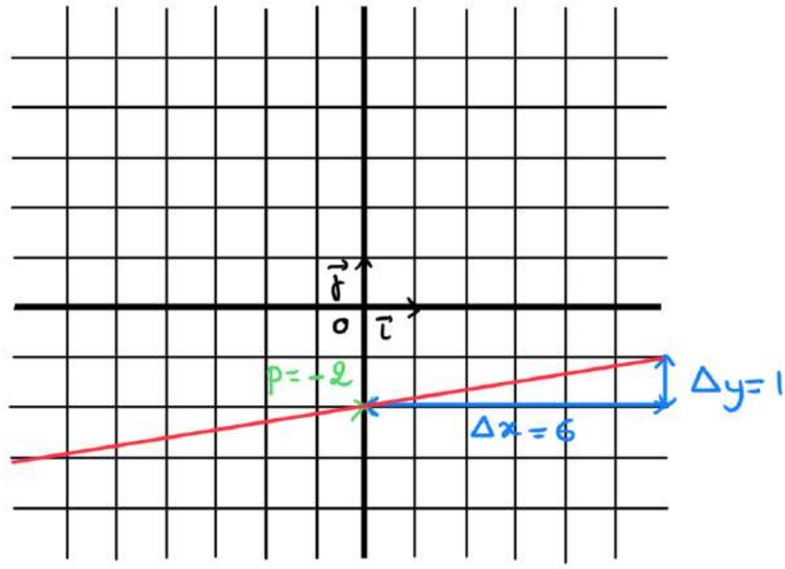
$$= -2$$

$p = 3$

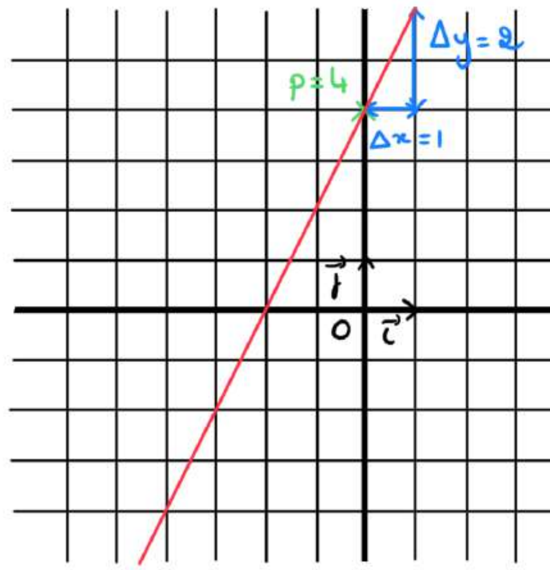
Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$

Exercice 33

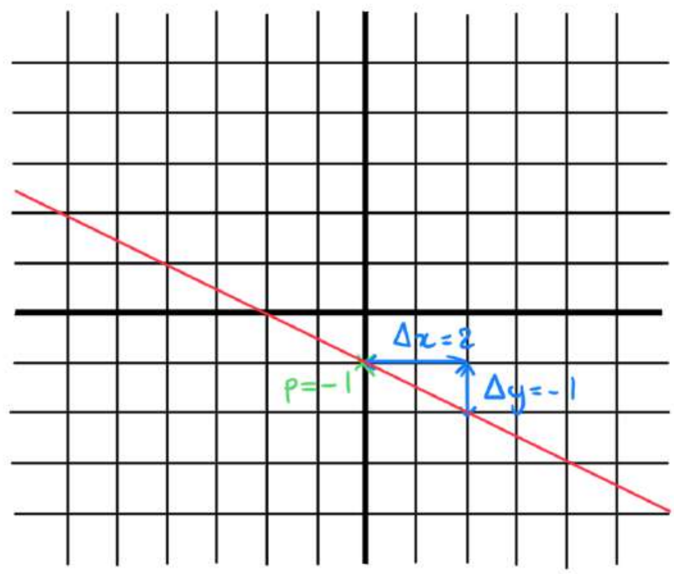
a)



b)



c)



Exercice 34

1) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = 0 \iff 5x + 3 = 0$$
$$\iff 5x = -3$$
$$\iff x = -\frac{3}{5}$$

Comme $m = 5 > 0$, on a

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

2) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = 0 \iff -4x + 12 = 0$$
$$\iff -4x = -12$$
$$\iff x = 3$$

Comme $m = -4 < 0$, on a

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = 0 \iff -3x - 21 = 0$$
$$\iff -3x = 21$$
$$\iff x = -7$$

Comme $m = -3 < 0$, on a

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

4) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = 0 \iff 6x + 18 = 0$$
$$\iff 6x = -18$$
$$\iff x = -3$$

Comme $m = 6 > 0$, on a

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

5) On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 \geq 3$

On a donc

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	

6) . $8x + 4 > 0 \iff 8x > -4$

$$\iff x > -\frac{1}{2}$$

. $3 - 2x > 0 \iff -2x > -3$

$$\iff x < \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $8x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

7) $6x - 36 > 0 \iff 6x > 36$

$$\iff x > 6$$

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
Signe de x^2		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $6x-36$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

8) . $-5x + 25 > 0 \iff -5x > -25$

$$\iff x < 5$$

. $34 + 17x > 0 \iff 17x > -34$

$$\iff x > -2$$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
Signe de $-5x+25$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $34+17x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

9) $11x + 121 > 0 \iff 11x > -121$

$$\iff x > -11$$

x	$-\infty$		-11		0		$+\infty$
Signe de x^3		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $11x+121$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

10) . $x - 2 > 0 \iff x > 2$

. $2x + 1 > 0 \iff 2x > -1$

$$\iff x > -\frac{1}{2}$$

. $5 - x > 0 \iff -x > -5$

$$\iff x < 5$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		5		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 35

1) $f(x) < 2 \iff -12x - 22 < 2$
$\iff -12x < 24$
$\iff x > -2$

2) $f(x) > 137 \iff x^2 - 144 > 0$
$\iff x^2 - 12^2 > 0$
$\iff (x-12)(x+12) > 0$

- $x - 12 > 0 \iff x > 12$
- $x + 12 > 0 \iff x > -12$

x	$-\infty$		-12		12		$+\infty$
Signe de $x-12$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-12)(x+12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -12[\cup]12 ; +\infty[$

3) $f(x) \leq 0 \iff 2x^3 + 4 \leq 0$
$\iff 2x^3 \leq -4$
$\iff x^3 \leq -2$
$\iff x \leq -\sqrt[3]{2}$
car la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) $f(x) < 0 \iff (-13x - 52)(-16x + 32) < 0$
- $-13x - 52 > 0 \iff -13x > 52$
$\iff x < -4$
- $-16x + 32 > 0 \iff -16x > -32$
$\iff x < 2$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
Signe de $-13x-52$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $-16x+32$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-4 ; 2[$

5) $f(x) \geq 0 \iff \dfrac{5x+8}{9-10x} \geq 0$
- $5x + 8 > 0 \iff 5x > -8$
$\iff x > -\frac{8}{5}$
- $9 - 10x > 0 \iff -10x > -9$
$\iff x < \frac{9}{10}$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		$\frac{9}{10}$		$+\infty$
Signe de $5x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $9-10x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$S = \left[-\frac{8}{5} ; \frac{9}{10}\right[$

6) $f(x) < 0 \iff (x^2 - 16)(2x + 14) < 0$
$\iff (x^2 - 4^2)(2x + 14) < 0$
$\iff (x-4)(x+4)(2x+14) < 0$

- $x - 4 > 0 \iff x > 4$
- $x + 4 > 0 \iff x > -4$
- $2x + 14 > 0 \iff 2x > -14$
$\iff x > -7$

x	$-\infty$		-7		-4		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $2x+14$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -7[\cup]-4 ; 4[$

7) $f(x) \leq 0 \iff (5x+8)^2 - (7-10x)^2 \leq 0$
$\iff ((5x+8)+(7-10x))((5x+8)-(7-10x)) \leq 0$
$\iff (5x+8+7-10x)(5x+8-7+10x) \leq 0$
$\iff (-5x+15)(15x+1) \leq 0$
- $-5x + 15 > 0 \iff -5x > -15$
$\iff x < 3$
- $15x + 1 > 0 \iff 15x > -1$
$\iff x > -\frac{1}{15}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{15}$		3		$+\infty$
Signe de $-5x+15$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $15x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty ; -\frac{1}{15}\right] \cup [3 ; +\infty[$

8) f est définie si $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$
- $60x + 12 > 0 \iff 60x > -12$
$\iff x > -\frac{1}{5}$

x	-1		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\frac{1}{5} ; +\infty\right[$

9)
- $12x + 1 > 0 \iff 12x > -1$
$\iff x > -\frac{1}{12}$
- $7 - 2x > 0 \iff -2x > -7$
$\iff x < \frac{7}{2}$
- $77x + 11 > 0 \iff 77x > -11$
$\iff x > -\frac{1}{7}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		$-\frac{1}{12}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Signe de $12x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $7-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $77x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

10) $f(x) \geq 3x^2 - 18x + 1 \iff -x^2 - 6x - 8 \geq 3x^2 - 18x + 1$
$\iff -4x^2 + 12x - 9 \geq 0$
$\iff 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$
$\iff (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \leq 0$
$\iff (2x-3)^2 \leq 0$

Comme $(2x-3)^2 \geq 0$, on a nécessairement
$(2x-3)^2 = 0 \iff 2x - 3 = 0$
$\iff 2x = 3$
$\iff x = 3$

Exercice 36

1) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(x) = \frac{1}{3} \iff \frac{3}{2}x - 4 = \frac{1}{3}$$

$$\iff \frac{3}{2}x = \frac{13}{3}$$

$$\iff x = \frac{26}{9}$$

2) g est une fonction affine.
Comme $m = \frac{3}{2} > 0$, g est croissante sur $\mathbb{R}$.

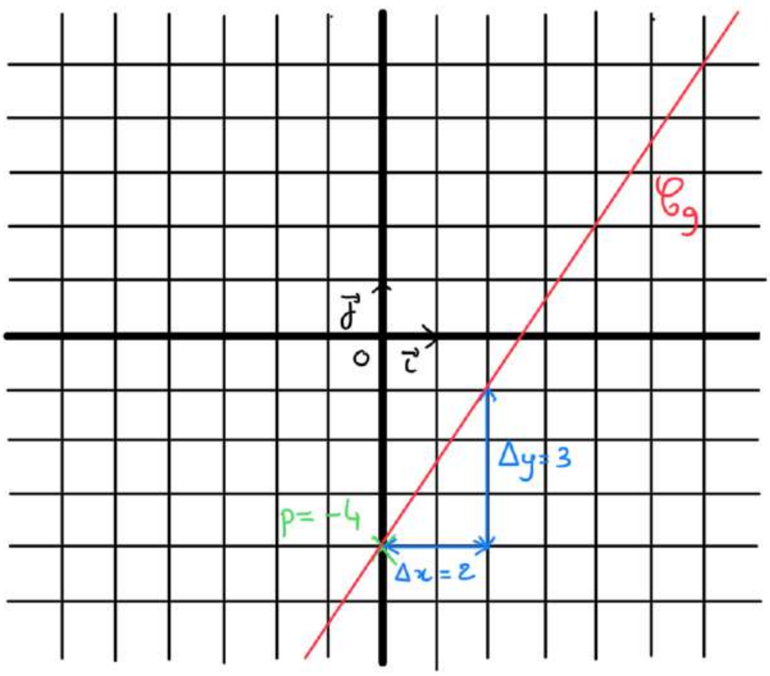
3) $$g(x) > 0 \iff \frac{3}{2}x - 4 > 0$$

$$\iff \frac{3}{2}x > 4$$

$$\iff x > \frac{8}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

4)



Exercice 37

1) Pour tout $t>0$, $V(t) = \left(1-\frac{4t}{100}\right) \times 5042$
$= 5042 - 201{,}68t$

Ainsi, V est une fonction affine.

2) t est nécessairement strictement positif car le photocopieur subit une décôte.
La valeur du photocopieur reste positive donc le photocopieur ne peut perdre plus de 100% de sa valeur. Ainsi

$$4t \leqslant 100 \iff t \leqslant 25.$$

3) Comme V est une fonction affine et que $m = -201{,}68 < 0$, V est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;25]$

4) On cherche $t \in]0;25]$ tel que

$$V(t) = 548 \iff 5042 - 201{,}68t = 548$$
$$\iff -201{,}68t = -4494$$
$$\iff t \simeq 22{,}28$$

Ainsi, la décote a été de $4t = 89{,}12\%$.

5) La valeur du photocopieur aurait été de

$$5042\left(1-\frac{22{,}28}{100}\right) \simeq 3918{,}64€$$

Exercice 38

Partie A

	Lancers francs réussis	Lancers francs non réussis	Total
Cercle touché	103	17	120
Cercle non touché	117	13	130
Total	220	30	250

2) $P(\overline{R}) = \dfrac{30}{250}$ $\qquad P(\overline{R} \cap \overline{C}) = \dfrac{13}{250}$

$= \dfrac{3}{25}$

3) $R \cup C$ est l'évènement le lancer a été réussi ou le cercle a été touché.

$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C)$

$= \dfrac{220}{250} + \dfrac{120}{250} - \dfrac{103}{250}$

$= \dfrac{237}{250}$

Partie B

1) $250 + x$ correspondra au nombre total de lancers.

$220 + x$ correspondra au nombre de lancers réussis

2) $\dfrac{220+x}{250+x} > \dfrac{98,1}{100} \iff \dfrac{220+x}{250+x} - \dfrac{98,1}{100} > 0$

$\iff \dfrac{100(220+x) - (250+x)98,1}{100(250+x)} > 0$

$\iff \dfrac{22000 + 100x - 24525 - 98,1x}{250+x} > 0$

$\iff \dfrac{1,9x - 2525}{250+x} > 0$

. Pour tout $x > 0$, $250 + x > 0$

• $1,9x - 2525 > 0 \iff 1,9x > 2525$

$\iff x > \dfrac{25250}{19}$

$\iff x \geqslant 1329$

3) Le joueur devrait faire au moins 1329 lancers francs réussis.

Exercice 39

1)a) $h(-20) = \dfrac{-100\times(-20)}{-20+100}$

$= \dfrac{2000}{80}$

$= 25$

Le taux réciproque de -20% est 25%.

$h(60) = \dfrac{-100\times 60}{60+100}$

$= \dfrac{-6000}{160}$

$= -37{,}5$

Le taux réciproque de $60\ \%$ est $-37{,}5\%$.

b) Soit $x \in]-100\,;+\infty[$. Soit $h(x)$ le taux réciproque de x. On a alors

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{h(x)}{100}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{h(x)}{100} = \frac{1}{1+\frac{x}{100}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x)}{100} = \frac{1}{1+\frac{x}{100}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x)}{100} = \frac{1-1-\frac{x}{100}}{1+\frac{x}{100}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x)}{100} = \frac{-x}{100+x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h(x) = \frac{-100x}{100+x}$$

2) a) Il aurait fallu investir

$$10000\left(1+\frac{h(400)}{100}\right) = 10000\left(1-\frac{400}{400+100}\right)$$

$$= 10000\left(1-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{10\,000}{5}$$

$$= 2000$$

b) Soit f la fonction demandée. On a alors

$$f(x) = \frac{x}{5}$$

Exercice 40

1)a) $\mathcal{A}_{\text{latérale}} = 2\times 30\times x + 2\times y\times 30$
$= 60x + 60y$

Or, on sait que
$$xy = 2500 \iff y = \frac{2500}{x}$$
Ainsi
$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = 60x + \frac{60\times 2500}{x}$$
$$= 60x + \frac{150\,000}{x}$$

b) Afin d'avoir l'aire totale du patron, il faut ajouter 2 fois l'aire de la base à l'aire latérale
$$A(x) = \mathcal{A}_{\text{latérale}} + 2\times 2500$$
$$= 60x + 5000 + \frac{150\,000}{x}$$

2) Pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$,
$$A(x) \geq 11\,000 \iff 60x + 5000 + \frac{150\,000}{x} \geq 11000$$
$$\iff 60x - 6000 + \frac{150\,000}{x} \geq 0$$
$$\iff \frac{60x^2 - 6000x + 150000}{x} \geq 0$$
$$\iff \frac{x^2 - 100x + 2500}{x} \geq 0$$
$$\iff x^2 - 2\times 50\times x + 50^2 \geq 0$$
car $x>0$
$$\iff (x-50)^2 \geq 0$$

3) Comme $(x-50)^2 \geq 0$, on sait que $A(x) \geq 11000$.

De plus $A(50) = 60\times 50 + 5000 + \dfrac{150\,000}{50}$
$= 3000 + 5000 + 3000$
$= 11\,000$

Ainsi A admet pour minimum $11\,000$ atteint en 50.

4) Ainsi Eddy doit faire une boite dont la base aura pour largeur 50 et pour longueur $\dfrac{2500}{50} = 50$.

Exercice 41

1) Comme ABCD est un carré, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ont des directions perpendiculaires, le repère est orthogonal. De plus, AB = AD. Par conséquent, $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$ est un repère orthonormé du plan.

2)a) $B(1;0)$ $E(2;0)$
$C(1;1)$ $F($
$D(0;1)$
$K\left(1;\frac{1}{2}\right)$

b) On calcule les coordonnées de $\vec{DK}$ et $\vec{KE}$.

$\vec{DK}\begin{pmatrix} x_K - x_D \\ y_K - y_D \end{pmatrix}$ ie $\vec{DK}\begin{pmatrix} 1-0 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}$ ie $\vec{DK}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{KE}\begin{pmatrix} x_E - x_K \\ y_E - y_K \end{pmatrix}$ ie $\vec{KE}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ie $\vec{KE}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{DK} = \vec{KE}$

Ainsi $\vec{DK}$ et $\vec{KE}$ sont colinéaires

Par conséquent, D, K et E sont alignés.

3)a) On sait que
- les droites (AC) et (DK) sont sécantes en F.
- les droites (AD) et (CK) sont parallèles.

Ainsi, d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{FK}{FD} = \frac{FC}{FA} = \frac{KC}{DA}$$

les longueurs des côtés sont proportionnelles deux à deux. Ainsi les triangles FDA et FKC sont semblables.

b) On sait que $DA = 1$ et $KC = \frac{1}{2}$

On a donc

$$\frac{FK}{FD} = \frac{KC}{DA} \iff \frac{FK}{FD} = \frac{1}{2}$$

$$\iff FK = \frac{1}{2}FD.$$

c) On sait que
- les droites (AC) et (DE) sont sécantes en F.
- les droites (AE) et (DC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{FA}{FC} = \frac{FE}{FD} = \frac{AE}{CD}$$

On sait que $AE = 2$ et $CD = 1$

Ainsi $\frac{FE}{FD} = \frac{AE}{CD} \iff \frac{FE}{FD} = 2$

$$\iff FE = 2FD$$

En utilisant les deux égalités précédemment démontrées on a

$$FE \times FK = 2FD \times \frac{1}{2}FD \iff FE \times FK = FD^2$$

Exercice 42

1) $\mathcal{A}_{\text{verte}} = \mathcal{A}_{AMPN} + \mathcal{A}_{PBC}$

$= x \times x + \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

$= x^2 + \dfrac{6(6-x)}{2}$

$= x^2 + 3(6-x)$

$= x^2 - 3x + 18$

$\mathcal{A}_{\text{jaune}} = \mathcal{A}_{PMB} + \mathcal{A}_{ICP} + \mathcal{A}_{DNP}$

$= \dfrac{(6-x) \times x}{2} + \dfrac{3(6-x)}{2} + \dfrac{(6-x) \times x}{2}$

$= \dfrac{6x - x^2 + 18 - 3x + 6x - x^2}{2}$

$= \dfrac{-2x^2 + 9x + 18}{2}$

$= -x^2 + \dfrac{9}{2}x + 9.$

$\mathcal{A}_{\text{bleue}} = \mathcal{A}_{IPD}$

$= \dfrac{3 \times (6-x)}{2}$

$= \dfrac{18 - 3x}{2}$

$= -\dfrac{3}{2}x + 9.$

2) $P_{\text{verte}} = \dfrac{x^2 - 3x + 18}{36}$

$= \dfrac{1}{36}x^2 - \dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{2}$

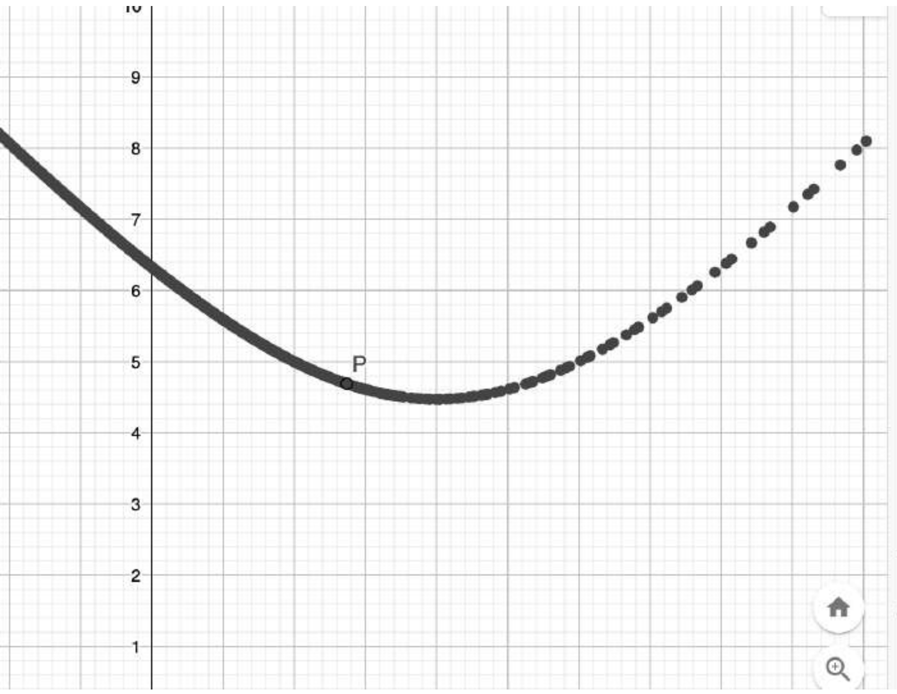
$P_{\text{jaune}} = \dfrac{-x^2 + \frac{9}{2}x + 9}{36}$

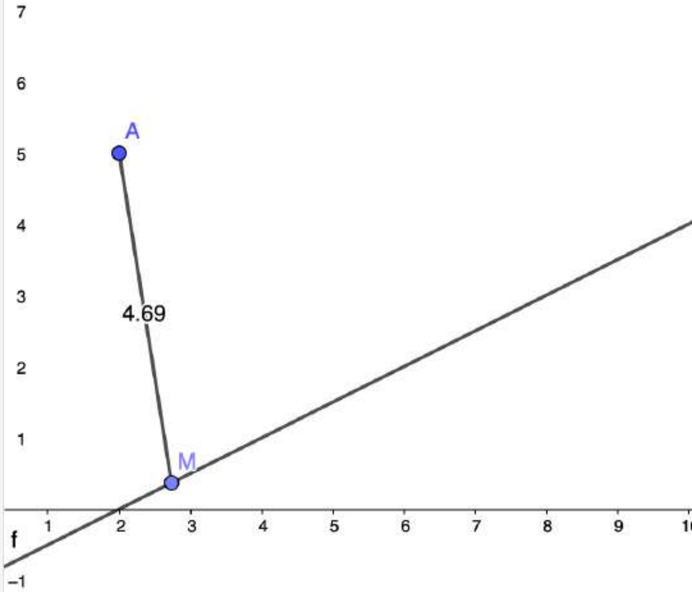
$= -\dfrac{1}{36}x^2 + \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{4}$

$P_{\text{bleue}} = \dfrac{-\frac{3}{2}x + 9}{36}$

$= -\dfrac{1}{24}x + \dfrac{1}{4}$

3) $x \simeq 2{,}26$


P


A
4.69
M
f

Exercice 43

Partie A

5) M doit avoir pour coordonnées $(4;1)$

6) (AM) et d semblent perpendiculaires

Partie B

1) $\frac{1}{2}x_B - 1 = \frac{1}{2}\times 0 - 1$

$= -1$

$= y_B$

donc $B \in d$.

2) Comme $M \in d$, on a

$$y_M = \frac{1}{2}x - 1$$

3) $AM^2 = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}^2$

$= (x-2)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 1 - 5\right)^2$

$= x^2 - 4x + 4 + \left(\frac{1}{2}x - 6\right)^2$

$= x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - 6x + 36$

$= \frac{5}{4}x^2 - 10x + 40$

4)a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\frac{5}{4}(x-4)^2 + 20 = \frac{5}{4}(x^2 - 8x + 16) + 20$

$= \frac{5}{4}x^2 - 10x + 20 + 20$

$= \frac{5}{4}x^2 - 10x + 40$

b) On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$(x-4)^2 \geqslant 0 \iff \frac{5}{4}(x-4)^2 \geqslant 0$

$\iff \frac{5}{4}(x-4)^2 + 20 \geqslant 20$

Or $f(4) = 20$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(4)$

c) AM^2 est minimal pour $x = 4$.

Ainsi M a alors pour coordonnées $(4;1)$

On a alors

$AM = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$.

Exercice 44

Partie A

1) On sait que AMS est un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$MS^2 = AM^2 + AS^2$$
$$= x^2 + (5-x)^2$$
$$= x^2 + 25 - 10x + x^2$$
$$= 2x^2 - 10x + 25$$

2) On sait que BMR est un triangle rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$MR^2 = BM^2 + BR^2$$
$$= (5-x)^2 + x^2$$
$$= 2x^2 - 10x + 25$$

3)a) RSH est un triangle rectangle en H.

b) $SH = AD - AS - HD$
$$= 5 - (5-x) - (5-x)$$
$$= 5 - 5 + x - 5 + x$$
$$= 2x - 5$$

c) On sait que le triangle RSH est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$RS^2 = RH^2 + SH^2$$
$$= 5^2 + (2x-5)^2$$
$$= 25 + 4x^2 - 20x + 25$$
$$= 4x^2 - 20x + 50$$

d) On sait que

$$MS^2 + MR^2 = 2x^2 - 10x + 25 + 2x^2 - 10x + 25$$
$$= 4x^2 - 20x + 50$$
$$= RS^2$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, le triangle MSR est rectangle en M.
Par conséquent, (MS) et (MR) sont perpendiculaires

Partie B

1) $M\left(\frac{x}{5} ; 1\right)$ $R\left(1 ; \frac{5-x}{5}\right)$ $S\left(0 ; \frac{x}{5}\right)$

2) $$MS = \sqrt{(x_S - x_M)^2 + (y_S - y_M)^2}$$
$$= \sqrt{\left(0 - \frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5} - 1\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{25} - \frac{2}{5}x + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + 1}$$

$$MR = \sqrt{(x_R - x_M)^2 + (y_R - y_M)^2}$$
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{5-x}{5} - 1\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}x^2 + \left(\frac{5-x-5}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{25}x^2}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + 1}$$

$$RS = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2}$$
$$= \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{x}{5} - \frac{5-x}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{2x-5}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{4}{25}x^2 - 4x + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 2}$$

3) On a, d'une part
$$RS^2 = \frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$$

On a, d'autre part
$$MS^2 + MR^2 = \frac{2}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + 1 + \frac{2}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + 1$$
$$= \frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$$

Ainsi, $MS^2 + MR^2 = RS^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MRS est rectangle de M.

4) Par conséquent, (MS) et (MR) sont perpendiculaires

Exercice 45

1)a) Le coût total pour 5 pièces produites par jour est 1500€

b) 9 pièces sont produites pour 2000€.

c) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque le chiffre d'affaires est supérieur au coût total c'est-à-dire entre 7 et 24 pièces produites par jour.

2) Le nombre de pièces pour lequel R est maximal est 17.

3) Le bénéfice augmente pour x allant de 3 à 17. Or le coût moyen augmente de 15,2 à 17. L'affirmation est donc fausse.