Préparer ma rentrée mathématiques en 2nde GT

Lycée Robert Doisneau

à Corbeil-Essonnes

1er Juillet 2022 - 30 Août 2022

I. Calcul

1) Nombres relatifs et décimaux

Exercice 1 : Calculer sans calculatrice :

a. $2-5$
b. $-12-(-37)$
c. $-9+18$
d. $7-(-9)$
e. $-6-19$
f. $-7-4$
g. $-20(-17+16)+18$
h. $-13+17$
i. $8-15(7-6)$
j. $-5,5-2,1(3+2)$
k. $2(5-8)+(-4)$
l. $3(2-8)-(-6+1)$

Exercice 2 : Comparer

a. $3,5$ et $3,02$
b. $-6,7$ et -7
c. 5 et -4
d. $(-3+2)\times 4$ et -8
e. $5,9$ et $5,99$
f. $-0,5$ et $-0,25$
g. $2,51$ et $2,502$
h. $5\times(4-2)$ et -10

2) Décomposition en produit de facteur premier.

Exemple : Décomposer en produit de facteur premier : $60 = 2\times 30 = 2\times 2\times 15 = 2\times 2\times 3\times 5 = 2^2\times 3\times 5$

Exercice 3 : Décomposer en produit de facteur premier :

a. 27 b. 24 c. 45 d. 100 e. 8 f. 125 g. 88 h. 64 i. 48

3) Fraction

Cours :

- Somme ou soustraction :
  $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$ $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}=\dfrac{a-c}{b}$ ✎ Les fractions doivent avoir le même dénominateur
- Produit :
  $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$ ✎ On multiplie numérateur et dénominateur entre eux.
- Quotient :
  $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$ ✎ Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{7}=\dfrac{1\times 7}{2\times 7}+\dfrac{4\times 2}{7\times 2}=\dfrac{7+8}{14}=\dfrac{15}{14}$
  $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3\times 5}{4\times 5}-\dfrac{2\times 4}{5\times 4}=\dfrac{15-8}{20}=\dfrac{7}{20}$
- $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{2\times 6}{3\times 5}=\dfrac{2\times 2\times 3}{3\times 5}=\dfrac{4}{5}$
- $\dfrac{3}{8}\div\dfrac{7}{2}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3\times 2}{4\times 2\times 7}=\dfrac{3}{28}$

Exercice 4 : Calculer sans calculatrice et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\dfrac{11}{9}+\dfrac{10}{9}$ d. $\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{8}$ g. $\dfrac{8}{3}\times\dfrac{7}{16}$ j. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{8}{3}$ l. $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{5}}$

b. $\dfrac{15}{17}-\dfrac{6}{17}$ e. $\dfrac{7}{3}-\dfrac{5}{4}$ h. $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{2}{7}$ k. $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{9}}$

c. $\dfrac{5}{28}-\dfrac{12}{28}$ f. $\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{9}$ i. $\dfrac{7}{6}+\dfrac{3}{8}$

Exercice 5 : Comparer sans calculatrice

a. $\dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{4}{5}$ b. $-\dfrac{8}{7}$ et $-\dfrac{9}{7}$ c. $\dfrac{9}{2}$ et $\dfrac{6}{5}$ d. $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{5}{8}$ e. $-\dfrac{9}{2}$ et $-\dfrac{2}{3}$ f. $-\dfrac{3}{7}$ et $-\dfrac{7}{9}$

Exercice 6 : Ecrire sous la forme d'une seule fraction

a. $4+\dfrac{3}{x+2}$ b. $\dfrac{2x}{x+1}-5$ c. $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

4) Puissance de 10 et écriture scientifique

Cours : Soit deux entiers n et p :

- $10^n\times 10^p=10^{n+p}$
- $\dfrac{10^n}{10^p}=10^{n-p}$
- $(10^n)^p=10^{n\times p}$

Exemple :

- $10^4\times 10^3=10^{4+3}=10^7$
- $\dfrac{10^2}{10^5}=10^{2-5}=10^{-3}$
- $(10^2)^3=10^{2\times 3}=10^6$

Exercice 7 : Calculer sans calculatrice et donner le résultat sous forme de puissance de 10.

a. 100 c. $10\,000\times 10$ e. $0,001\times 10^6$ g. $\dfrac{10^8\times 10^{-3}}{10^2}$ h. $\dfrac{10\times 10^{11}}{10^{-3}}$

b. $10^5\times 10^{-3}$ d. $\dfrac{10^5}{10^7}$ f. $\dfrac{1}{100}\times 10^3$

Cours : Ecrire un nombre sous forme scientifique c'est l'écrire sous la forme $a\times 10^p$
où a un nombre ayant un chiffre différent de 0 avant la virgule et p est un entier positif ou négatif.

Exemple : Ecrire sous forme scientifique les nombres suivants : $10\,627{,}53=1,062753\times 10^4$

Exercice 8 : Ecrire sous forme scientifique les nombres suivants :

a. $855,8$ c. $38761,5$ e. $14,129\times 10^{-4}$ g. $69,384\times 10^{-1}$ i. $0,59507$

b. $0,8823$ d. $0,003354$ f. $944,27\times 10^3$ h. $7\,082\times 10^{-2}$ j. 899×10^{15}

5) Calcul littéral

Cours :

✎ Développer une expression algébrique c'est transformer un produit en une somme ou une différence

✎ Factoriser une expression algébrique c'est transformer une somme ou une différence en un produit

- Simple distributivité ou facteur commun :

$$k(a+b) \underset{\text{Factoriser}}{\overset{\text{Développer}}{\rightleftarrows}} k \times a + k \times b$$

- Double distributivité : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

- Identité remarquable : $(a-b)(a+b) \underset{\text{Factoriser}}{\overset{\text{Développer}}{\rightleftarrows}} a^2 - b^2$

Exemple :

⋆ Développer

- Simple distributivité : $2(3x-5) = 2 \times 3x - 2 \times 5 = 6x - 10$
- Double distributivité :
$(3+x)(-x+7) = 3 \times (-x) + 3 \times 7 + x \times (-x) + x \times 7 = -3x + 21 - x^2 + 7x = -x^2 + 4x + 21$
- Identité remarquable : $(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

⋆ Factoriser

- Facteur commun : $3x + 18 = 3 \times x + 3 \times 6 = 3(x+6)$
- Identité remarquable : $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$

Exercice 9 : Développer les expressions suivantes :

a. $5(3x+2)$ b. $-3(2x-5)$ c. $5x(-3x+2)$ d. $-4(5x-2)$

Exercice 10 : Développer puis réduire les expressions suivantes :

a. $3(2x-4) + 5(3-x)$ b. $2x(5+3x) - 4(x+5)$

Exercice 11 : Développer puis réduire les expressions suivantes :

a. $(4x-8) - (3x-7) + (-2x+3)$
b. $(6x^2 - 5x + 7) - (4x^2 - 5x - 5)$
c. $-(3x^2 - 5x + 2) + (2x^2 - 2x + 8) - (3 - 2x + 2x^2)$

Exercice 12 : Développer puis réduire les expressions suivantes :

a. $(4x+5)(3x+2)$ b. $(5x-2)(x+7)$ c. $3(4x-3)(5x-2)$

Exercice 13 : Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

a. $(6x-4) - (2x-8)$ b. $(6x-4)(2x-8)$ c. $(6x-4) + (2x-8)$

Exercice 14 : Factoriser les expressions suivantes :

a. $2(x+1) - 4$
b. $3x + 7x^2$
c. $6x + 6$
d. $4x(3x+2) + 7(3x+2)$
e. $x^2 - 9$
f. $(x+1)^2 - 36$
g. $(x-2)^3 - 25$

6) Equation

Cours : Résoudre une équation, c'est déterminer les valeurs possibles de l'inconnue x pour que l'égalité soit vraie. Ces valeurs sont appelées solutions de l'équation.
Méthode : On regroupe tous les termes contenant un x du même côté du signe "=", et les termes sans x de l'autre côté, on dit ainsi qu'on "isole x".
On arrive à une équation de la forme $ax = b$ puis il suffit de diviser par a ($a \neq 0$).

Exemple : Résoudre :

$$\begin{aligned}
6x + 4 &= 0 \\
&\quad -4 \\
6x &= -4 \\
&\quad \div 6 \\
x &= \frac{-4}{6} \\
x &= \frac{-2}{3}
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est $\frac{-2}{3}$.

$$\begin{aligned}
3x + 7 &= 2 - 2x \\
&\quad +2x \\
5x + 7 &= 2 \\
&\quad -7 \\
5x &= -5 \\
&\quad \div 5 \\
x &= -1
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est -1.

Exercice 15 : Résoudre les équations suivantes :

a. $x + 2 = 1$

b. $3x - 1 = 5$

c. $-2x + 4 = 7$

d. $2x - 6 = -10$

e. $-4x + 1 = 7$

f. $\frac{2}{5}x + 5 = -1$

g. $-\frac{1}{3}x - 2 = -1$

h. $-x + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

i. $-\frac{1}{4}x + 3 = -7$

j. $\frac{3}{5}x + \frac{1}{10} = \frac{2}{15}x - \frac{3}{20}$

II. Fonction

1) Lecture graphique

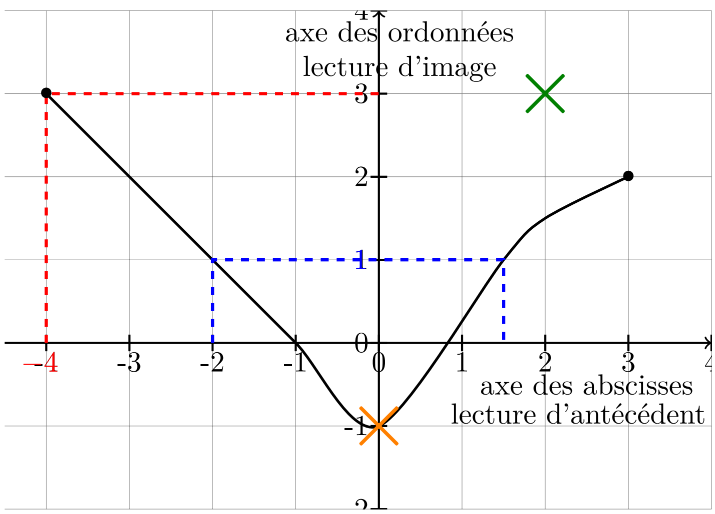
Cours : ✎ Une fonction est un processus qui, à chaque valeur du nombre x, associe un unique nombre y, noté $f(x)$, appelé l'image de x par f. On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

✎ On dit que x est un antécédent de y par f lorsque $y = f(x)$.

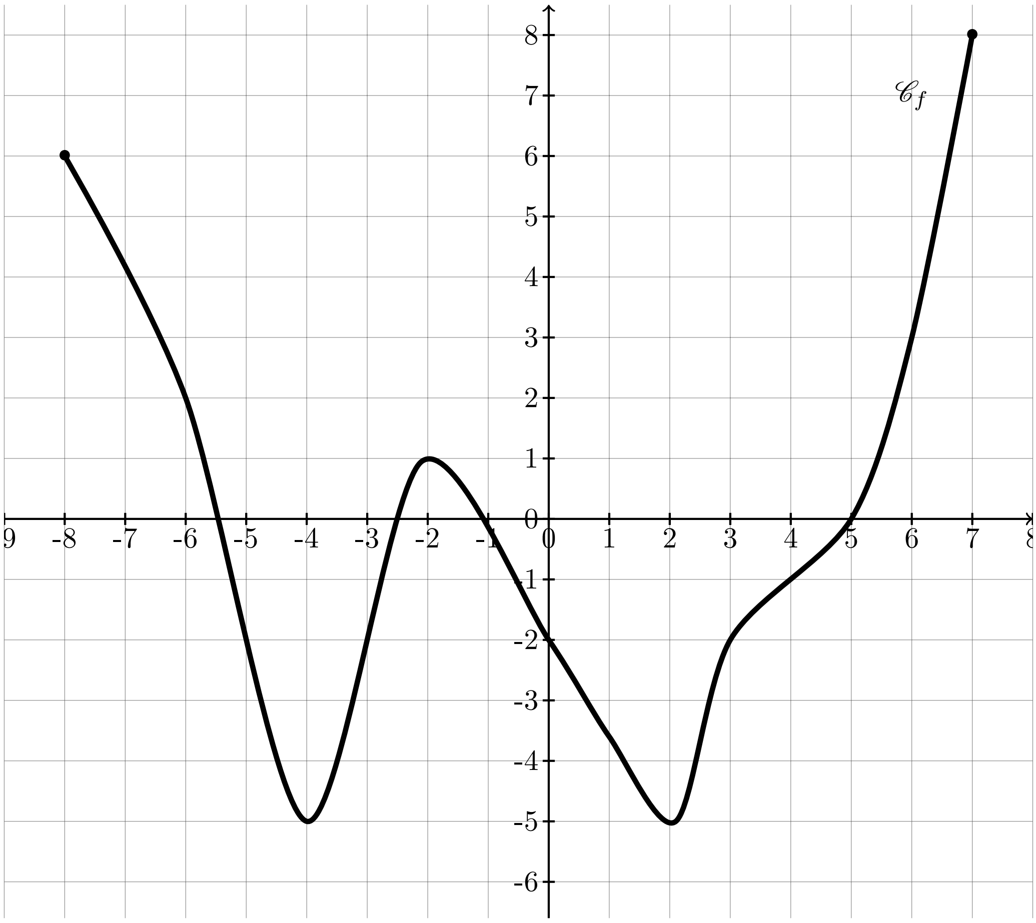
✎ La représentation graphique de f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.

Exemple : A chaque nombre x compris entre -4 et 3, la fonction f associe le nombre $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

- L'image de -4 par f est 3 on a $f(-4) = 3$
- 1 a deux antécédents -2 et $1,5$ car : $f(-2) = 1$ et $f(1,5) = 1$
- Le point $(0; -1)$ appartient à la courbe représentative de f car $f(0) = -1$.
- Le point $(2; 3)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f car $f(2) = 1,5 \neq 3$.

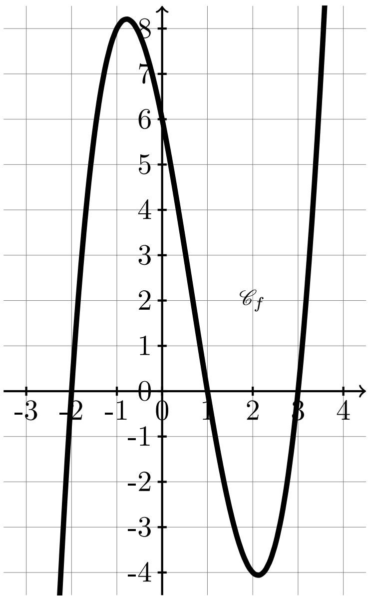


Exercice 16 : On considère la fonction f définie sur $[-8;7]$. Sa représentation graphique est données ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f.
   a. 6
   b. -6
   c. -8
   d. -4
   e. -2
   f. 0
   g. 3
2. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants
   a. -2
   b. 0
   c. 8
   d. -5
3. Le point de coordonnées A (0 ;-2) appartient-il à la courbe représentative de f ?
4. Le point de coordonnées B (2 ;-6) appartient-il à la courbe représentative de f ?

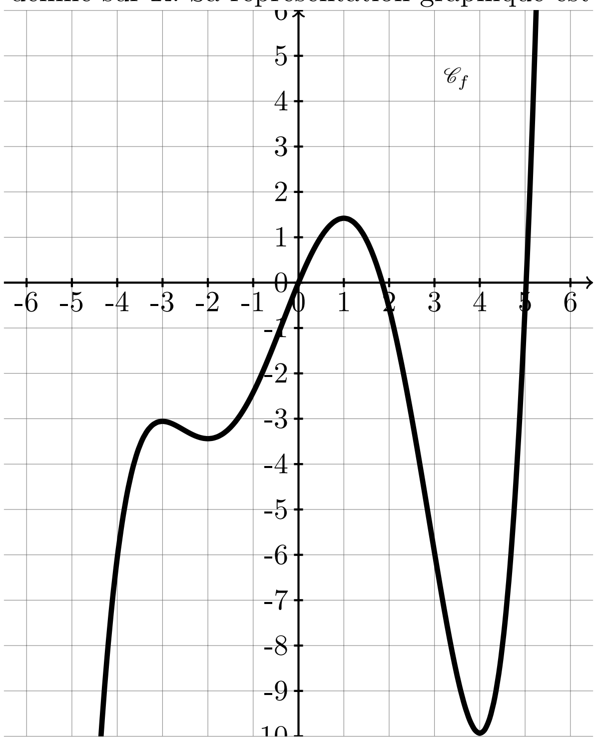
Exercice 17 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Sa représentation graphique est données ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement l'image de -2 par la la fonction f.
2. Déterminer graphiquement l'image de 2 par la la fonction f.
3. Déterminer graphiquement le (ou les) antécédent(s) de 0 par la fonction f.

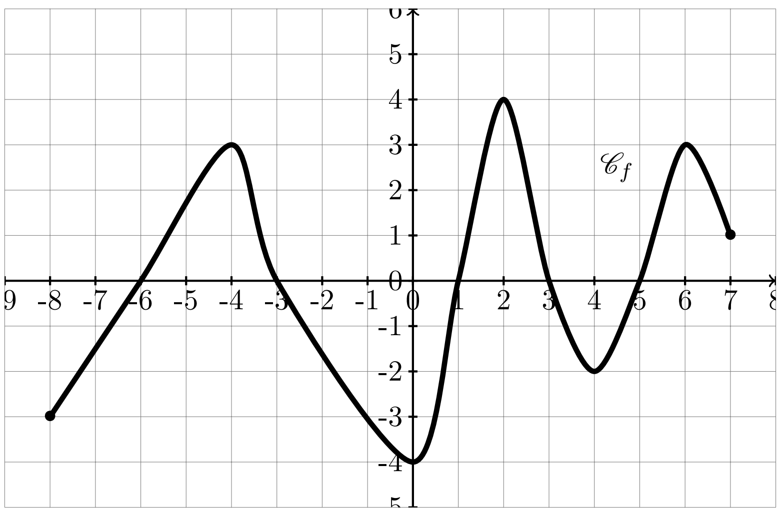
Exercice 18 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Sa représentation graphique est données ci-dessous.



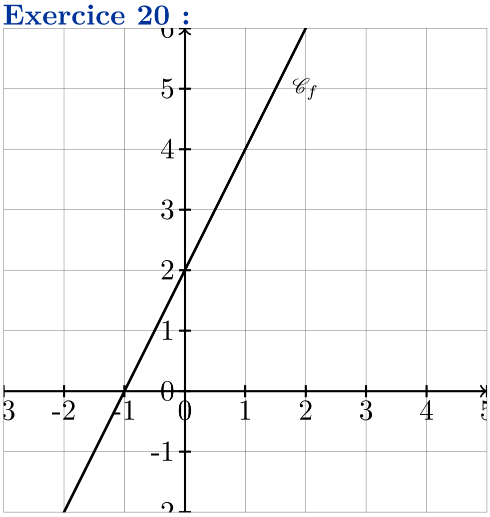
1. Graphiquement, déterminer l'image de -4 par f.
2. Déterminer graphiquement le (ou les) antécédent(s) de 0 par la fonction f.
3. Déterminer graphiquement l'image de 0 par la fonction f.

Exercice 19 : On considère la fonction f définie sur $[-8;7]$. Sa représentation graphique est données ci-dessous.



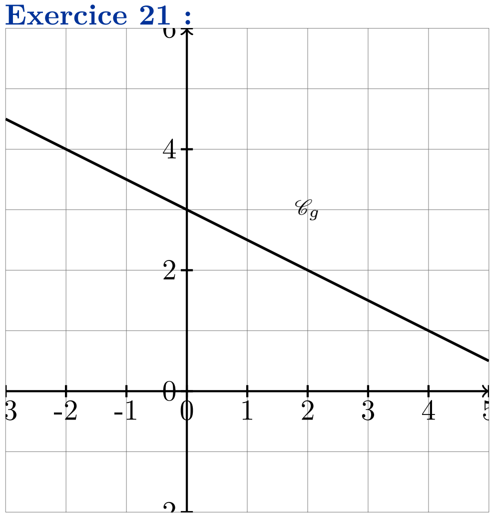
1. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f.
   a. -8 b. -4 c. 0 d. 2
2. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants par la fonction f.
   a. 4 b. 1 c. -3
3. Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de f :
   a. A(-4 ;-5) b. B(-3 ;1) c. C(1 ;5) d. D(3 ;-2) e. E(1 ;-2) f. F(7,8)

Exercice 20 :



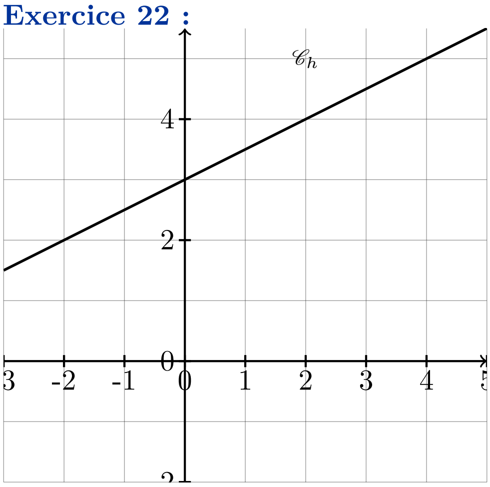
1. Déterminer graphiquement les images des nombres suivants par la fonction f.
   a. 0 b. 2 c. -1,5
2. Déterminer graphiquement les antécédents des nombres suivants par la fonction f.
   a. 4 b. 5 c. 0
3. Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de f :
   a. A(0,5 ;3) b. B(1 ;-0,5)

Exercice 21 :



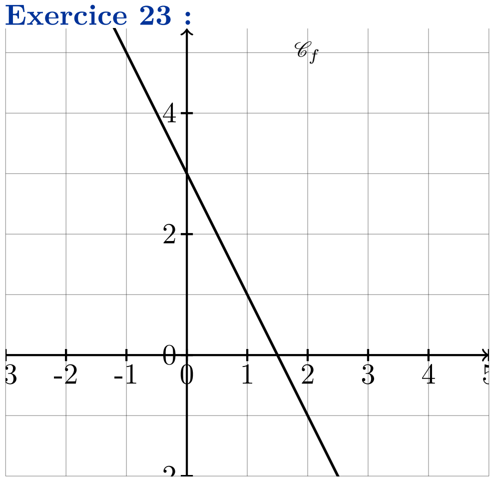
1. Déterminer graphiquement les images des nombres suivants par la fonction f.
   a. 0 b. 3 c. -1
2. Déterminer graphiquement les antécédents des nombres suivants par la fonction f.
   a. 4 b. 1,5 c. 0
3. Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de f :
   a. A(3 ;0) b. B(-2 ;4)

Exercice 22 :



1. Déterminer graphiquement les images des nombres suivants par la fonction f.
   a. 0 b. 3 c. -2
2. Déterminer graphiquement les antécédents des nombres suivants par la fonction f.
   a. 4 b. 5 c. 0
3. Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de f :
   a. A(2 ;-4) b. B(3 ;4,5)

Exercice 23 :



1. Déterminer graphiquement les images des nombres suivants par la fonction f.
   a. 0 b. 2 c. -1
2. Déterminer graphiquement les antécédents des nombres suivants par la fonction f.
   a. 4 b. -1 c. 0
3. Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de f :
   a. A(2 ;0) b. B(5 ;-1)

2) Cas particulier : affine, calcul d'image, antécédent.

Exemple : Soit $f(x) = -4x + 7$

Par le calculer déterminer

1. l'image de 3 par la fonction f :

   ⋆ l'image de 3 est $f(3)$ qu'on calcule en remplaçant x par 3 dans l'expression de f :

   $$f(3) = -4 \times 3 + 7 = -12 + 7 = -5$$

   Donc $f(3) = -5$ ainsi l'image de 3 est -5

2. le(s) antécédent(s) de -1 par la fonction f :

   ⋆ on cherche le(s) valeur(s) de x (antécédent) telle(s) que

   $$\begin{aligned} f(x) &= -1 \\ -4x + 7 &= -1 \end{aligned}$$

   On résout l'équation

   $$\begin{array}{lrcll} & -4x+7 & = & -1 & \\ \xrightarrow{-7} & -4x & = & -8 & \xleftarrow{-7} \\ \xrightarrow{\div(-4)} & x & = & \dfrac{-8}{-4} & \xleftarrow{\div(-4)} \\ & x & = & 2 & \end{array}$$

   Ainsi 2 est l'antécédent de -1 par la fonction f.

   Il n'y en a qu'un car on a trouvé une seule solution à l'équation. On a $f(2) = -1$

Exercice 24 : Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 1 \ ; \quad g(x) = -2x + 5 \ ; \quad h(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

1. Déterminer, par le calcul, les images suivantes :

   (a) $f(2) =$

   (b) $g(-1) =$

   (c) $h(0) =$

   (d) $f\left(-\frac{1}{6}\right) =$

   (e) $h(5) =$

2. Déterminer par le calcul :

   (a) le(s) antécédent(s) de 4 par la fonction f

   (b) le(s) antécédent(s) de -1 par la fonction g

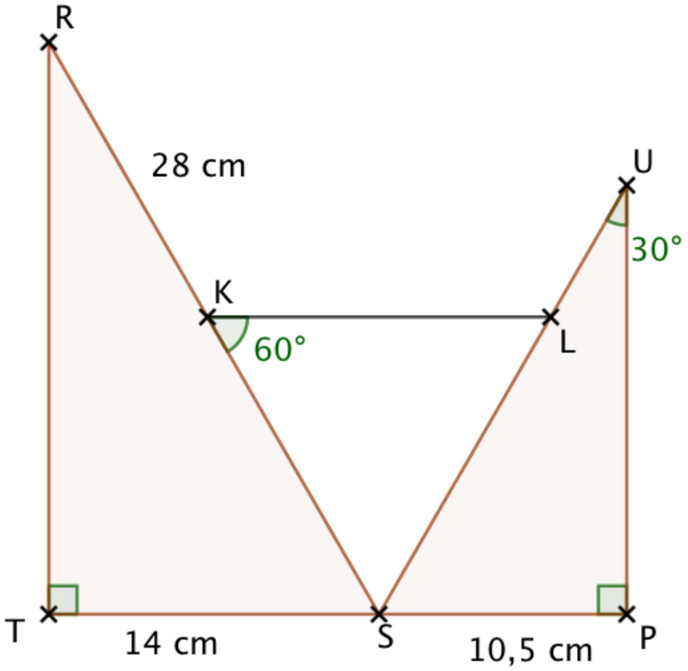
   (c) le(s) antécédent(s) de 0 par la fonction h

   (d) le(s) antécédent(s) de $-\frac{7}{2}$ par la fonction h

   (e) le(s) antécédent(s) de $\frac{1}{3}$ par la fonction g

III. Exercices d'approfondissement

Exercice 25 : On considère la figure suivante.



Les points T, S, P d'une part, R, K, S d'autre part et enfin, S, L, U sont alignés.
On sait également que $\widehat{TRS} = 30°$

1. A l'aide des mesures indiquées sur la figure et dans l'énoncé, démontrer que l'angle $\widehat{TSR}$ mesure 60°
2. (a) Démontrer que les triangles SRT et SUP sont semblables
   (b) Déterminer le coefficient de réduction permettant de passer du triangle SRT au triangle SUP.
3. Calculer la longueur SU.
4. Quelle est la nature du triangle SKL ? Justifier.

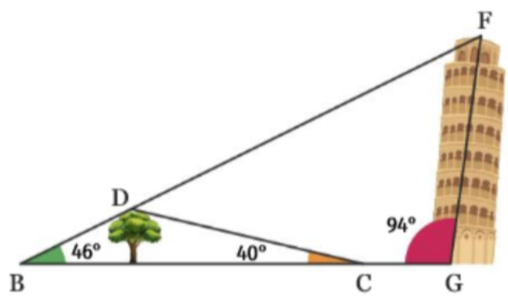
Exercice 26 : Baptiste et sa petite soeur Coralie sont venus voir la tour de Pise.

A l'aide d'un inclinomètre, ils mesurent les angles qu'ils reportent sur le schéma ci-après.

La tour de Pise est matérialisée par le segment $[GF]$, Baptiste par le point B et sa petite soeur par le point C.

Pour faciliter leurs mesures, ils utilisent un arbre de sommet D planté devant la tour.

Baptiste explique à sa petite soeur que les triangles qu'ils forment tous les deux avec le sommet de l'arbre est semblable à celui que Baptiste forme avec la tour. Démontrer que Baptiste a raison.



Exercice 27 : En quoi consiste le cryptage affine ?

- Chaque lettre d'un message est codée par son rang dans l'alphabet (A correspond au rang 0, B au rang 1, etc....). On calcule l'image de ces nombres par une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$
- On détermine le reste est la division euclidienne de ces images par 26.
- Chaque reste obtenu correspond à une lettre de l'alphabet et on crypte ainsi le message.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le but est de déterminer les paramètres a et b d'une fonction affine qui permet de crypter un message.

Parcours 1

1. (a) Dans un même repère, tracer les droites (d_1) et (d_2) sachant que :
   - la droite (d_1) est la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto 10 - x$
   - la droite (d_2) passe par les points $A(-1; 1)$ et $B(11; 4)$.

   (b) Le paramètre a de la fonction affine f recherchée est l'abscisse du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2). Déterminer graphiquement la valeur de a.

2. (a) Dans le même repère, tracer la droite (d_3) représentant la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{3}x$.

   (b) Le paramètre b de la fonction affine f recherchée est l'ordonnée du point d'intersection des droites (d_2) et (d_3). Déterminer graphiquement la valeur de b.

3. Donner alors l'expression de la fonction affine f recherchée et crypter le mot « FONCTION ».

Parcours 2

Voici 4 dominos.

$k(x) = (2x+3) - (-3x+7)$ le paramètre a de la fonction k est ...	L'antécédent de 5 par la fonction $m(x) = -2x - 3$ est ...

L'antécédent de 13 par la fonction $i(x) = 6,5x$ est ...	$h(x) = 5 - 3x$. Le paramètre b de la fonction h est ...

$g(x) = 5x - 7$. L'image de 2 par g est ...	$b(x) = \frac{-1}{8}x + 9$. $b(16) = \ldots$

L'image de -2 par la fonction $p(x) = -11x - 26$ est ...	$t(x) = 0,75x$. $t(4) = \ldots$

1. Trouver la valeur des deux faces des quatre dominos puis les placer correctement à la suite d'un domino bleu déjà placé.

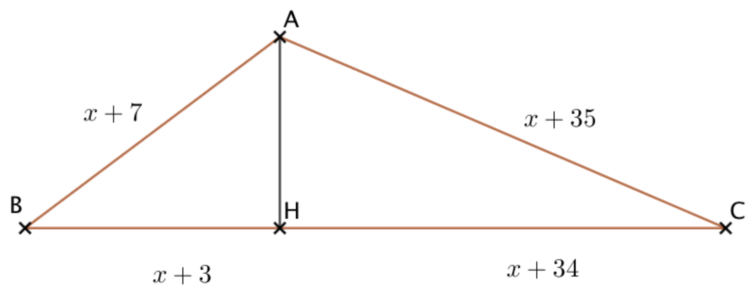
6 face a	2 face b	face c	face d	face e	face f	face g	face h	face i	face j

2. (a) Le coefficient a de la fonction affine f recherchée est la somme des faces a, c, g et i.

   (b) Le coefficient b de la fonction affine f recherchée est la différence des faces d et h.

3. Donner alors l'expression de la fonction affine f recherchée et crypter le mot « FONCTION ».

Exercice 28 : Déterminer la valeur de x afin que les triangles ABH et AHC soient rectangles en H.

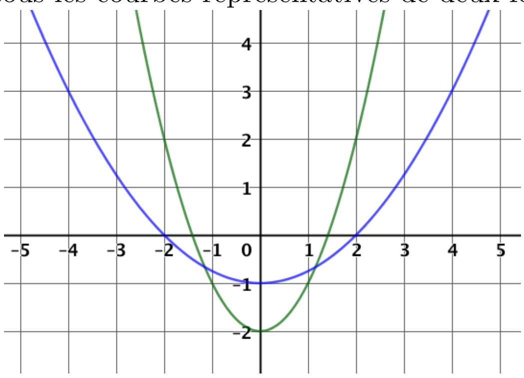


Exercice 29 : Soient a, b et c, trois fonctions telles que :

- $a(x) = b(x) + 5x$
- $b(x) = (c(x))^2 - 4$

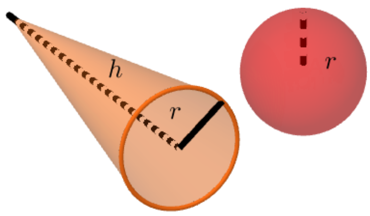
Calculer l'image de 2 par la fonction a sachant que l'image de 2 par la fonction c est égale à 3.

Exercice 30 : On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions h et k.



Sachant que $h(x) = x^2 - 2$ et que $k(x) = 0,25x^2 - 1$, associer chacune des expressions à sa courbe représentative.

Exercice 31 : Exprimer en fonction de r, la hauteur h que doit avoir un cône afin qu'il ait le même volume qu'une boule dont le rayon est égal à celui de la base du cône.



Exercice 32 : On transforme un carré en un rectangle en augmentant de 4cm sa longueur et en diminuant de 2cm sa largeur. Le rectangle obtenu a la même aire que le carré d'origine. Combien mesurait le côté de ce carré avant qu'il ne soit transformé ?

Exercice 33 : On soustrait le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{41}{62}$. On obtient alors l'inverse de $\frac{41}{62}$.

Quel est ce nombre ?