Préparer ma rentrée mathématiques en $1^{\text{ère}}$ Générale sans Spécialité Mathématiques

Lycée Robert Doisneau

à Corbeil-Essonnes

1^{er} Juillet 2022 - 30 Août 2022

I. Calcul

1) Fraction

Cours :

- Somme ou soustraction :
  $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$ $\quad \dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}=\dfrac{a-c}{b}$ ✎ Les fractions doivent avoir le même dénominateur
- Produit :
  $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$ ✎ On multiplie numérateur et dénominateur entre eux.
- Quotient :
  $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$ ✎ Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{7}=\dfrac{1\times 7}{2\times 7}+\dfrac{4\times 2}{7\times 2}=\dfrac{7+8}{14}=\dfrac{15}{14}$
  $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3\times 5}{4\times 5}-\dfrac{2\times 4}{5\times 4}=\dfrac{15-8}{20}=\dfrac{7}{20}$
- $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{2\times 6}{3\times 5}=\dfrac{2\times 2\times 3}{3\times 5}=\dfrac{4}{5}$
- $\dfrac{3}{8}\div\dfrac{7}{2}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3\times 2}{4\times 2\times 7}=\dfrac{3}{28}$

Exercice 1 : Calculer sans calculatrice et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\dfrac{11}{9}+\dfrac{10}{9}$ b. $\dfrac{15}{17}-\dfrac{6}{17}$ c. $\dfrac{5}{28}-\dfrac{12}{28}$

d. $\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{8}$ e. $\dfrac{7}{3}-\dfrac{5}{4}$ f. $\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{9}$

g. $\dfrac{8}{3}\times\dfrac{7}{16}$ h. $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{2}{7}$ i. $\dfrac{7}{6}+\dfrac{3}{8}$

j. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{8}{3}$ k. $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{9}}$ l. $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{5}}$

Exercice 2 : Comparer sans calculatrice

a. $\dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{4}{5}$ b. $-\dfrac{8}{7}$ et $-\dfrac{9}{7}$ c. $\dfrac{9}{2}$ et $\dfrac{6}{5}$ d. $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{5}{8}$ e. $-\dfrac{9}{2}$ et $-\dfrac{2}{3}$ f. $-\dfrac{3}{7}$ et $-\dfrac{7}{9}$

Exercice 3 : Ecrire sous la forme d'une seule fraction

a. $4+\dfrac{3}{x+2}$ b. $\dfrac{2x}{x+1}-5$ c. $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$ d. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{2x+1}$

2) Puissance

Cours : Soient n et $p\in\mathbb{Z}$ et a et $b\in\mathbb{R}$:

- $a^n\times b^n=(ab)^n$
- $a^n\times a^p=a^{n+p}$
- $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$
- $\dfrac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$
- $(a^n)^p=a^{n\times p}$

Exemple : Décomposer en produit de facteurs premiers

1. $\dfrac{5^4\times 5^3}{5^{-2}}=5^{4+3-(-2)}=5^9$

2. $\dfrac{4^2}{4^5} = 4^{2-5} = 4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2\times(-3)} = 2^{-6}$

3. $(10^2)^3 \times 5 = 10^{2\times 3} \times 5 = (2\times 5)^6 \times 5 = 2^6 \times 5^6 \times 5^1 = 2^6 \times 5^7$

Exercice 4 : Décomposer en produit de facteurs premiers :

a. 88

b. 94

c. 175

d. 64^5

e. 27^4

f. 125^7

g. 48×54

h. $75^4 \times 27^8$

i. $30^2 \times 12^3 \times 60^4$

j. $\dfrac{42}{56}$

k. $\dfrac{7^2}{63}$

l. $\dfrac{75^8}{15^4}$

m. $\dfrac{12^5}{3^4 \times 2^{11}}$

n. $\dfrac{36^5}{8^3 \times 27^4}$

o. $8 \times (7\times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^2}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2$

p. $9 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{5 \times 2^2}{(3^2 \times 2)^4}$

3) Racine Carrée

Cours : Soit a et b deux réels positifs

- $\sqrt{a}^2 = a$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- *Si* $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple :

1. Écrire $\dfrac{33}{\sqrt{11}}$ sans racine carrée au dénominateur et en simplifiant la fraction :

$$\frac{33}{\sqrt{11}} = \frac{33\times\sqrt{11}}{\sqrt{11}\times\sqrt{11}} = \frac{33\times\sqrt{11}}{11} = \frac{3\times 11\times\sqrt{11}}{11} = 3\sqrt{11}$$

2. Écrire $\sqrt{150}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et b est l'entier le plus petit possible :

$$\sqrt{150} = \sqrt{25\times 6} = \sqrt{25}\times\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

3. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\sqrt{63}$

$$49 < 63 < 64 \qquad \text{donc} \quad \sqrt{49} < \sqrt{63} < \sqrt{64} \qquad \text{donc } 7 < \sqrt{63} < 8$$

4. Donner une valeur exacte de : $\sqrt{18} - \sqrt{36}$

$$\sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{9\times 2} - \sqrt{25\times 2} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

5. Ecrire sans racine carrée au dénominateur $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}$

Pour cela on multiplie en haut et en bas par le « conjugué » de $1-\sqrt{2}$ qui est $1+\sqrt{2}$

$$\frac{5}{1-\sqrt{2}} = \frac{5\times(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})} = \frac{5\times(1+\sqrt{2})}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{5\times(1+\sqrt{2})}{1-2} = \frac{5\times(1+\sqrt{2})}{-1} = -5(1+\sqrt{2})$$

Exercice 5 :

1. Ecrire les valeurs suivantes sans racine carrée au dénominateur et en simplifiant les fractions :

a. $\dfrac{121}{\sqrt{11}}$ b. $\dfrac{70}{\sqrt{5}}$ c. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ d. $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ e. $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et b est l'entier le plus petit possible

a. $\sqrt{27}$ b. $\sqrt{72}$ c. $\sqrt{180}$ d. $\sqrt{108}$ e. $\sqrt{50}$ f. $\sqrt{32}$

Exercice 6 : Donner un encadrement par deux entiers consécutifs des valeurs suivantes

a. $\sqrt{21}$ b. $\sqrt{102}$ c. $\sqrt{40}$ d. $\sqrt{13}$ e. $\sqrt{61}$ f. $\sqrt{99}$

Exercice 7 : Donner une valeur exacte de :

a. $2\sqrt{27} - \sqrt{12}$ b. $\sqrt{5} + \sqrt{20}$ c. $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ d. $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ e. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

Exercice 8 : 1. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$

2. Ecrire sans racine carrée au dénominateur

a. $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$ b. $\dfrac{2}{4-\sqrt{13}}$ c. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

4) Image, antécédent, point sur courbe

Cours : ✎ Une fonction est un processus qui, à chaque valeur du nombre x, associe un unique nombre y, noté $f(x)$, appelé l'image de x par f. On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

✎ On dit que x est un antécédent de y par f lorsque $y = f(x)$.

✎ La représentation graphique de f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.

Exemple : Soit $f(x) = -4x + 7$
Par le calculer déterminer

1. l'image de 3 par la fonction f :

   ⋆ l'image de 3 est $f(3)$ qu'on calcule en remplaçant x par 3 dans l'expression de f :

   $$f(3) = -4 \times 3 + 7 = -12 + 7 = -5$$

   Donc $f(3) = -5$ ainsi l'image de 3 est -5

2. le(s) antécédent(s) de -1 par la fonction f :

   ⋆ on cherche le(s) valeur(s) de x (antécédent) telle(s) que

   $$\begin{aligned} f(x) &= -1 \\ -4x+7 &= -1 && -7 \\ -4x &= -8 && \div(-4) \\ x &= \frac{-8}{-4} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Ainsi 2 est l'antécédent de -1 par la fonction f.

   Il n'y en a qu'un car on a trouvé une seule solution à l'équation. On a $f(2) = -1$

3. Le point $A(-2; 1)$ appartient-il à la courbe de f ?

   ⋆ On doit vérifier que l'ordonnée de A : 1 est bien l'image de son abscisse -2

   $f(-2) = -4 \times (-2) + 7 = 8 + 7 = 13 \neq 1$ donc A n'est pas sur la courbe.

Exercice 9 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -5x + 2$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de 3 par la fonction h.
2. Calculer si il existe le ou les antécédents de -8 par la fonction h.
3. Le point $E(-1; -3)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.
4. Le point G appartient à $\mathcal{C}_h$ et son ordonnée est 1. Quelle est son abscisse ? Justifier.
5. En quel point la courbe $\mathcal{C}_h$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Justifier.

Exercice 10 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x + 3$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de $\dfrac{2}{3}$ par la fonction h.
2. Calculer si il existe le ou les antécédents de 2 par la fonction h.
3. Le point $E(-1; -4)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.
4. Le point G appartient à $\mathcal{C}_h$ et son ordonnée est 7. Quelle est son abscisse ? Justifier.
5. En quel point la courbe $\mathcal{C}_h$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Justifier.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer l'image de 6 par f.
3. Calculer le ou les antécédent(s) s'ils existent de 1 par f.
4. Le point $A(22; 5)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_f$? Justifier votre réponse.

Exercice 12 : On considère la fonction carrée $f(x) = x^2 - 6$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.
   (a) si $x = 3$ alors $f(x) = 6$.
   (b) si $x = -1$ alors $f(x) = 1$.
   (c) si $f(x) = 16$ alors $x = 4$.
   (d) Le point $A(-2; -4)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
2. Calculer l'image de $\sqrt{5}$ par la fonction f.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) si il(s) existe(nt) de π par la fonction f.

Exercice 13 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer l'image de -2 par f.
3. Calculer, si il(s) existe(nt), le (ou les) antécédent(s) de 5 par f.
4. Le point $E(-1 ; 5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.
5. Le point G d'ordonnée -1 appartient à $\mathcal{C}_f$. Quelle est son abscisse ? Justifier.
6. En quel point la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées ? Justifier.

II. Développer, Factoriser, Identité remarquable

Cours :

✎ Développer une expression algébrique c'est transformer un produit en une somme ou une différence

✎ Factoriser une expression algébrique c'est transformer une somme ou une différence en un produit

- Simple distributivité ou facteur commun :

$$k(a+b) \underset{Factoriser}{\overset{Développer}{=}} k \times a + k \times b$$

- Double distributivité : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$
- Identité remarquable :

$$\begin{array}{ccc} (a-b)(a+b) & \overset{Développer}{=} & a^2 - b^2 \\ (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 & \underset{Factoriser}{=} & a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

1) Développer

Exemple :

⋆ Simple distributivité : $2(3x-5) = 2 \times 3x - 2 \times 5 = 6x - 10$

⋆ Double distributivité :
$(3+x)(-x+7) = 3 \times (-x) + 3 \times 7 + x \times (-x) + x \times 7 = -3x + 21 - x^2 + 7x = -x^2 + 4x + 21$

⋆ Identité remarquable :
$(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
$(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$

Exercice 14 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la distributivité.

a. $2 \times (a+4)$

b. $-4 \times (6-x)$

c. $(11x-7) \times 5$

d. $10 \times (5a-3b)$

e. $(-3x+8) \times (-7)$

f. $5 \times (5x^2 - 3x + 4)$

g. $a \times (20 - 2b + a)$

h. $(71x - 41) \times x$

i. $(2x^2 - 5x + 6) \times (-4x)$

j. $12 \times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}\right)$

Exercice 15 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la double distributivité.

a. $(2x+1)(3x-4)$

b. $(x^2+3)(1-3x)$

c. $(3a+2b)(-a-5b)$

d. $(a-b)(a+b)$

e. $(5x-y)(3y+x)$

f. $(8x+24)\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)$

g. $\frac{1}{3}(39x-11)(5x+3)$

h. $\left(\frac{2x}{7} + \frac{1}{5}\right)(14 - 35x)$

Exercice 16 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

a. $(a+5)^2$

b. $(9-b)^2$

c. $(x+7)^2$

d. $(10-x)(10+x)$

e. $(8x-6)^2$

f. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

g. $(11+3x)^2$

h. $(\sqrt{3}+\sqrt{27})^2$

i. $\left(\dfrac{x}{2}-3\right)^2$

j. $\left(\dfrac{5x}{12}+6\right)^2$

2) Factoriser

Exemple :

- ⋆ Facteur commun : $3x+18 = 3\times x + 3\times 6 = 3(x+6)$
- ⋆ Identité remarquable :
  $x^2-25 = x^2-5^2 = (x-5)(x+5)$
  $x^2+4x+4 = x^2+2\times x\times 2+2^2 = (x+2)^2$
  $x^2-12x+36 = x^2-2\times x\times 6+6^2 = (x-6)^2$
  $9x^2+12x+4 = (3x)^2+2\times 3x\times 2+2^2 = (3x+2)^2$

Exercice 17 : Factoriser et réduire les expressions suivantes.

a. $3a-6b+12$

b. $5x^2+3x$

c. $36a^2-24b+12c$

d. $7x-49x^2$

e. $\dfrac{1}{3}a+\dfrac{2}{3}b$

f. $\sqrt{2}x-5\sqrt{2}$

g. $(x-2)(3a-b)+(x-2)(7a+2b-3)$

h. $(7x-4)(10x+1)-(-3x+7)(7x-4)$

Exercice 18 : Factoriser et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

a. $16a^2-9b^2$

b. $4x^2-12x+9$

c. $25x^2-20x+4$

d. $9x^2+12x+4$

e. $144x^2-49y^2$

f. $\dfrac{9}{4}x^2-3x+1$

g. $9x^2+18x+9$

h. $121x^2+220x+100$

i. $144-16x^2$

j. $1-\dfrac{25}{36}x^2$

3) Calcul de $f(x+h)$

Exemple : Soit $f(x)=x^2-1$. Calculer $f(x+h)$:
$f(x+h)=(x+h)^2-1=x^2-2xh+h^2-1$

Exercice 19 : Soient x et h deux nombres réels, pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(x+h)$ sous forme développée.

a. $f(x)=5x-3$

b. $f(x)=-10x+6$

c. $f(x)=x^2$

d. $f(x)=-2x^2+1$

e. $f(x)=(x+2)^2$

f. $f(x)=x^2+x+1$

Exercice 20 : Soient x et h deux nombres réels, pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(x+h)-f(x)$ sous forme développée.

a. $f(x)=9x+1$

b. $f(x)=(2x-4)^2$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (où $x\neq 0$)

d. $f(x)=6x^2-4x+3$

III. Taux d'évolution : augmentation et diminution

Cours :

✎ Faire évoluer une quantité d'un taux t, correspond à **multiplier** cette valeur par son coefficient multiplicateur noté CM

$$CM = 1 + t$$

✎ Une grandeur évolue d'une valeur initiale ν_0 vers une valeur finale ν_1 avec pour coefficient multiplicateur CM , alors :

$$\nu_1 = \nu_0 \times CM$$

Exemple :

1. Lors d'une diminution de 10% le taux vaut $t = \dfrac{-10}{100} = -0,10$ donc le coefficient multiplicateur est $CM = 1 + t = 1 - 0,10 = 0,9$
2. Lors d'une augmentation de 3% le taux vaut $t = \dfrac{3}{100} = 0,03$ donc le coefficient multiplicateur est $CM = 1 + t = 1 + 0,03 = 1,03$
3. Le taux correspond à un $CM = 1,45$ est $t = CM - 1 = 0,45$ soit une évolution de 45% (augmentation)
4. Le taux correspond à un $CM = 0,82$ est $t = CM - 1 = -0,18$ soit une évolution de -18% (diminution)
5. Un article à 60€ diminue de 5% cela revient à multiplier par $CM = 1 - 0,05 = 0,95$.
   Le prix après réduction est donc de $60 \times 0,95 = 57$€.

   L'article subit une deuxième réduction de 5% après les deux réductions il vaut alors :
   $60 \times 0,95 \times 0,95 = 60 \times 0,,95^2 = 54,15$€.

Exercice 21 : Donner le coefficient multiplicateur correspondant à ces évolutions .

a. Augmentation de 2%
b. Augmentation de 67%
c. Diminution de 75%
d. Augmentation de 33%
e. Diminution de 5%
f. Diminution de 43%

Exercice 22 : Donner le taux puis le pourcentage d'évolution correspond au CM suivant :

a. $CM = 1,62$
b. $CM = 1,8$
c. $CM = 0,40$
d. $CM = 0,27$
e. $CM = 1,59$
f. $CM = 0,2$
g. $CM = 3$

Exercice 23 :

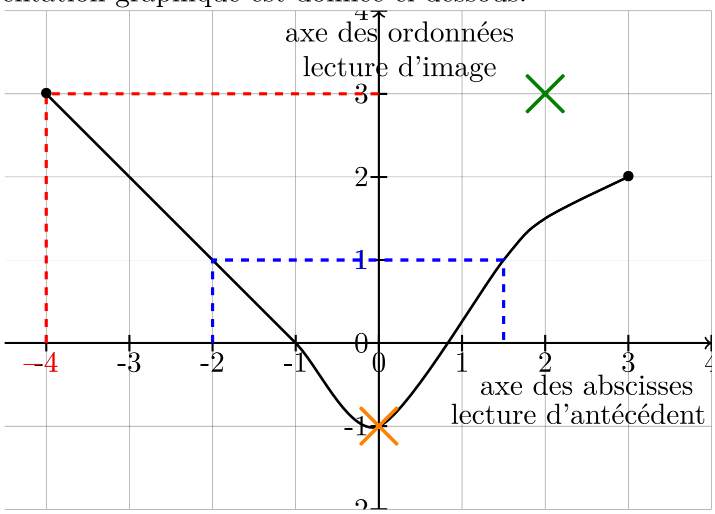
a. Un téléviseur coûte 450€ . Son prix augmente de 10%. Calculer la valeur finale.
b. Un pull coûte 30 € . Lors des soldes il y a une réduction de 30% dessus. Quel est le coefficient multiplicateur ? Calculer la valeur finale à partir du CM.
c. Diminuer un prix de 12%, revient à multiplier ce prix par ?
d. Augmenter un prix de 37% revient à multiplier par ?

Exercice 24 : Adnan fabrique des portes-clés. En janvier, il fabrique 300 porte-clés et les stocke. Il décide d'augmenter sa production de 12% tous les mois.

a. Quelle sera sa production de porte-clés en février ?
b. Quelle sera sa production de porte-clés en mars ?
c. Déterminer à partir de quand la production dépassera 700 portes-clés. Préciser à l'aide de la calculatrice.

IV. Lecture graphique

Exemple : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



- L'image de -4 par f est 3 on a $f(-4) = 3$
- 1 a deux antécédents -2 et $1,5$ car :
  $f(-2) = 1$ et $f(1,5) = 1$
- Le point $(0; -1)$ appartient à la courbe représentative de f car $f(0) = -1$.
- Le point $(2; 3)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f car $f(2) = 1,5 \neq 3$.

• Son tableau de variations est

x	-4		0		3
Variations de f	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

Abscisses où l'on change de variation

Ordonnées où l'on change de variation

• Son tableau de signe est

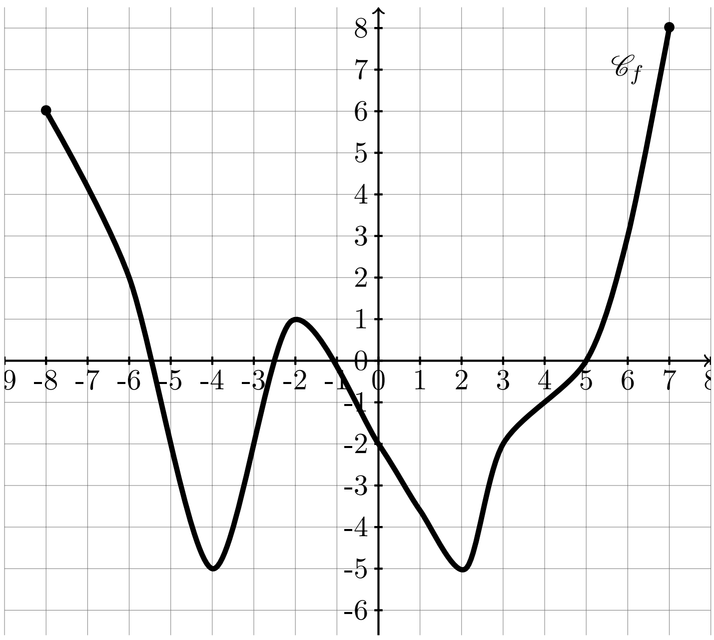
x	-4		-1		1		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Abscisses où l'on change de signe

Courbe au dessus (+) ou en dessous (-) de l'axe des abscisses

1) Variations de fonction, lecture d'image, d'antécédent, point sur courbe et signe

Exercice 25 : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



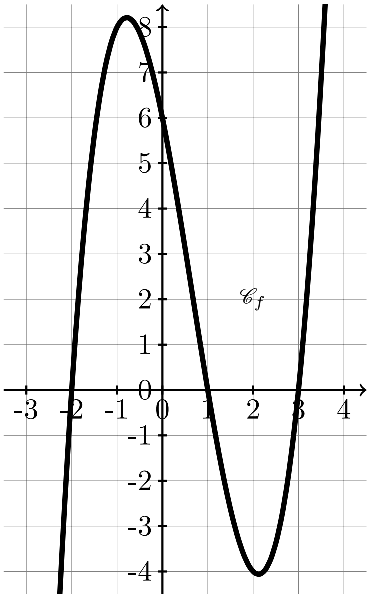
1. Quel est l'ensemble de définition de f
2. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f.

   a. 6   c. -8   e. -2   g. 3

   b. -6   d. -4   f. 0
3. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants

   a. -2   b. 0   c. 8   d. -5
4. A (0 ;-2) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
5. B (2 ;-6) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
6. Dresser le tableau de variation de f

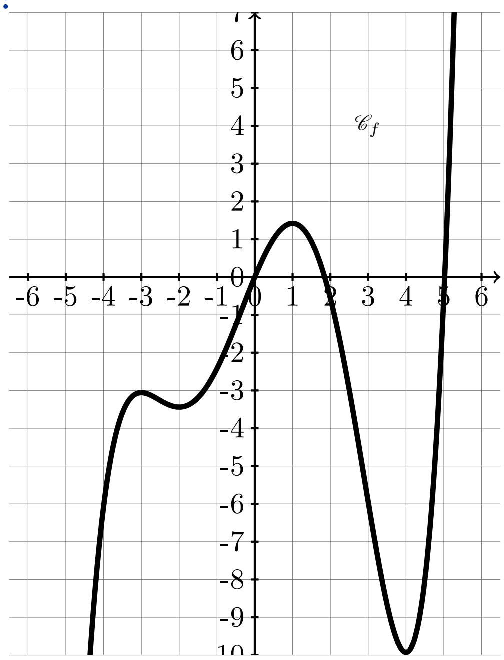
Exercice 26 :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est données ci-contre.

1. Déterminer graphiquementr l'image de -2 par la la fonction f.
2. Déterminer graphiquement l'image de 2 par la la fonction f.
3. Donner un nombre ayant exactement 2 antécédents par la fonction f.
4. Graphiquement dresser le tableau de signe de la fonction f

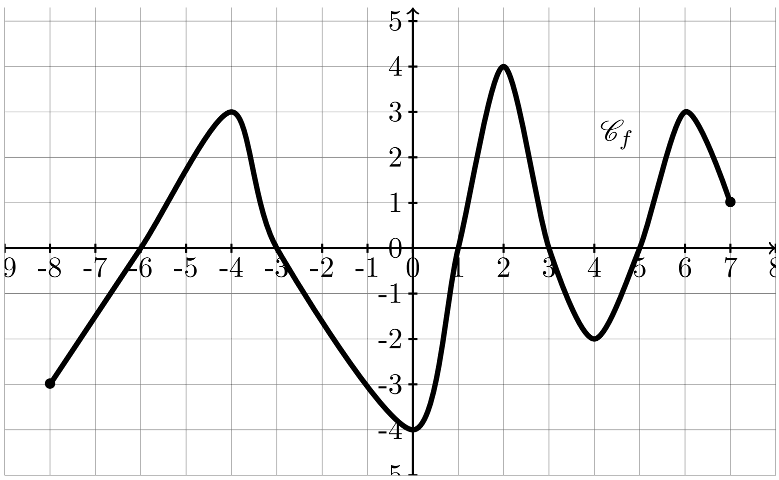
Exercice 27 :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est données ci-contre.

1. Déterminer graphiquement l'image de 4 par f.
2. Dresser le tableau de variation de f

Exercice 28 : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f
2. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f.
   a. -8 b. -4 c. 0 d. 2
3. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants
   a. 4 b. 1 c. -3
4. Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{C}_f$?
   a. A(-4 ;-5) b. B(-3 ;1) c. C(1 ;5) d. D(3 ;-2) e. E(1 ;-2) f. F(7,8)
5. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) Affine : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Cours : ✎ f est une **fonction affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = mx + p$$

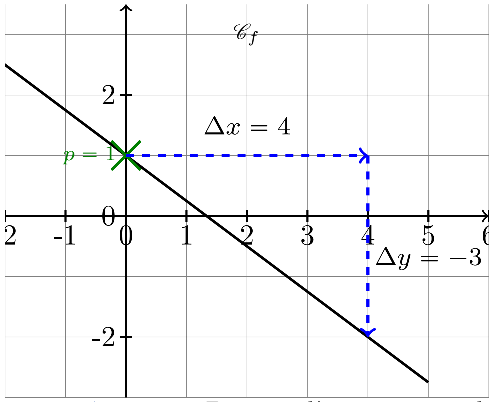
✎ m est appelé coefficient directeur. Pour tout $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B) \in \mathcal{C}_f$ alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

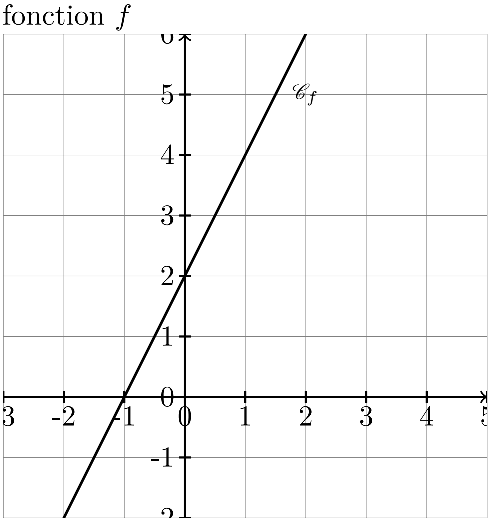
✎ p est appelé l'ordonnée à l'origine. En effet le point $P \in \mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = 0$ a pour ordonnée $f(0) = m \times 0 + p = p$. Donc $P(0; p)$

Exemple : Donner l'expression algébrique de la fonction f dont sa courbe est donnée ci-contre.

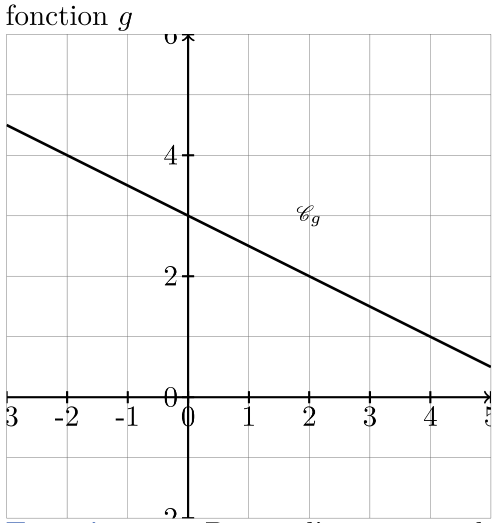
- $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{4}$
- $p = 1$
- Ainsi $f(x) = \dfrac{-3}{4}x + 1$



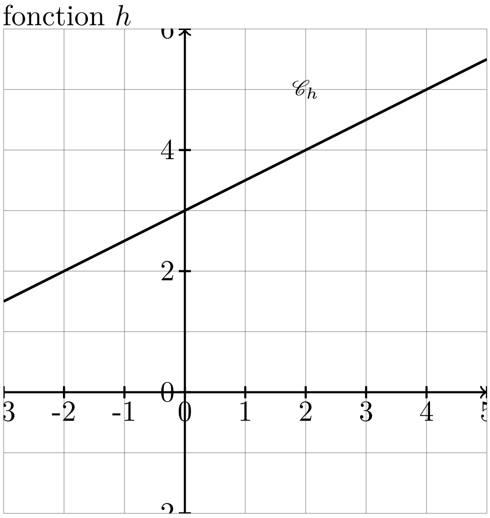
Exercice 29 : Donner l'expression algébrique de la fonction f



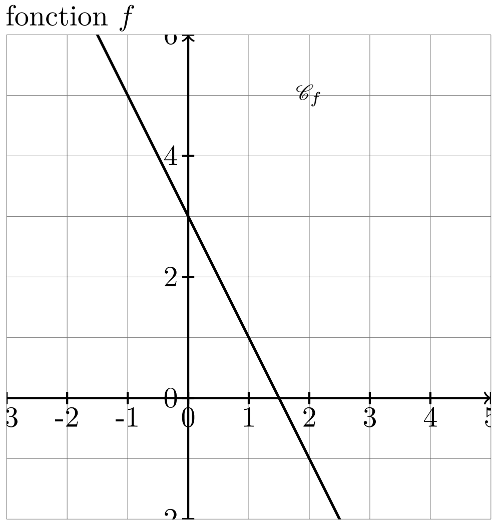
Exercice 30 : Donner l'expression algébrique de la fonction g



Exercice 31 : Donner l'expression algébrique de la fonction h

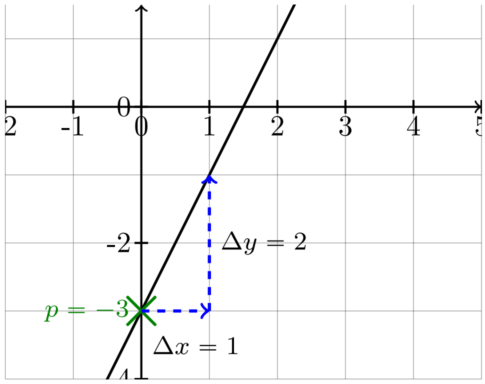


Exercice 32 : Donner l'expression algébrique de la fonction f



Exemple :
Tracer la courbe de la fonction $f(x) = 2x - 3$

- $m = 2 = \dfrac{2}{1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- $p = -3$



Exercice 33 : Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{6}x - 2$ b. $g : x \longmapsto 2x + 4$ c. $h : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x - 1$

V. Etude de signe

Cours : Résolution d'inéquation :

✎ Lorsqu'on additionne ou qu'on soustrait on ne change pas le sens de l'inégalité

✎ **Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre POSITIF on NE change PAS le sens de l'inégalité.**

Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre NEGATIF on CHANGE le sens de l'inégalité.

Exemple : 1. Dresser le tableau de signe de $f(x) = -2x + 7$:

On cherche les valeurs de x telles que $f(x) > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ -2x + 7 &> 0 \\ -2x &> -7 \qquad \text{on divise par } -2 < 0 \\ x &< \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

On résume sous forme de tableau de signe :
(cohérent car $m = -2 < 0$)

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

2. Etudier le signe de $f(x) = (-x + 5)(3x - 4)$

On résout :

$$\begin{aligned} -x + 5 &> 0 \\ -x &> -5 \\ x &< \frac{-5}{-1} = 5 \end{aligned}$$

On résout :

$$\begin{aligned} 3x - 4 &> 0 \\ 3x &> 4 \\ x &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

On résume sous forme de tableau de signe : $\frac{4}{3} < 5$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
Signe de $-x + 5$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $3x - 4$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du produit $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Etudier le signe de $g(x) = \dfrac{-x+5}{3x-4}$

   On va devoir étudier le signe de $-x+5$ puis de $3x-4$. En utilisant ce qu'on a fait avant.

ATTENTION - le dénominateur ne peut pas valoir 0 : là où le dénominateur vaut 0, g n'est pas définie.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
Signe de $-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $3x-4$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du quotient $g(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

g a pour valeur interdite $x = \frac{4}{3}$. Ainsi g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$ (cela signifie tous les réels sauf 0).

Exercice 34 : Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x + 3$
2. $f(x) = -4x + 12$
3. $f(x) = -3x - 21$
4. $f(x) = 6x + 18$
5. $f(x) = x^2 + 3$
6. $f(x) = (8x + 4)(3 - 2x)$
7. $f(x) = x^2(6x - 36)$
8. $f(x) = \dfrac{-5x+25}{34+17x}$
9. $f(x) = x^3(11x + 121)$
10. $f(x) = (x - 2)(2x + 1)(5 - x)$

Exercice 35 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-12x - 22 < 2$
2. $x^2 - 7 > 137$
3. $2x^3 + 4 \leqslant 0$
4. $(-13x - 52)(-16x + 32) < 0$
5. $\dfrac{5x+8}{9-10x} \geqslant 0$
6. $(x^2 - 16)(2x + 14) < 0$
7. $(5x + 8)^2 - (7 - 10x)^2 \leqslant 0$
8. $(60x + 12)\sqrt{x+1} > 0$
9. $\dfrac{(12x+1)(7-2x)}{77x+11} < 0$
10. $-x^2 - 6x - 8 \geqslant 3x^2 - 18x + 1$

VI. Exercices d'approfondissement

Exercice 36 : On s'intéresse à la fonction $g(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$.

1. Résoudre algébriquement $g(x) = \dfrac{1}{3}$
2. Donner les variations de la fonction g en justifiant votre réponse.
3. Dresser le tableau de signe de g.
4. Tracer $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé.

Exercice 37 : Après son achat, un article perd sa valeur petit à petit. On dit qu'il décote. Pour un modèle de photocopieur, la décote est de $t\%$ par an.

Si celui-ci est mal entretenu, il décote quatre fois plus vite, soit une décote de $4t\%$.

Une société achète un photocopieur neuf à 5 042€.

1. Pour tout $t > 0$, on note $V(t)$ la valeur du photocopieur, en fonction de sa décote, après une année d'utilisation avec un mauvais entretien.

   Donner l'expression de V en fonction de t et en déduire sa nature.

2. Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de V est $]0;25]$

3. Déterminer les variations de V sur $]0;25]$

4. Après cette année d'utilisation avec un mauvais entretien, la valeur du photocopieur est à présent de 548€.

   Quelle décote a été subie par le photocopieur ? Arrondir au centième près.

5. Avec un bon entretien et la même décote, quelle aurait été la valeur du photocopieur au bout d'un an ?

Exercice 38 : Une nouvelle recrue en NBA fait le bilan de son adresse aux lancers francs après ses 250 premiers tirs.

Son club lui transmet les statistiques suivantes :

- 220 lancers francs ont été réussis ;
- 103 lancers francs réussis ont touché le cercle ;
- 130 lancers francs n'ont pas touché le cercle : cela concerne les lancers réussis, mais aussi les ratés.

  R est l'évènement « le lancer franc a été réussi » et C l'évènement « le lancer franc a touché le cercle ».

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Lancers francs réussis	Lancers francs non réussis	Total
Cercle touché			
Cercle non touché			
Total			

2. Calculer $P(\bar{R})$ et $P(\bar{R} \cap \bar{C})$ puis interpréter le résultat.

3. Traduire l'évènement $R \cup C$ par une phrase puis calculer $P(R \cup C)$.

Partie B

Le record NBA de réussite au lancer franc en carrière est de $98,1\%$. Le joueur veut battre ce record et pense qu'il va réussir tous les prochains lancers francs. Soit x le nombre de lancers francs à tenter.

1. Déterminer à quoi correspondent les expressions $250 + x$ et $220 + x$.

2. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{220 + x}{250 + x} > \dfrac{98,1}{100}$

3. L'objectif semble-t-il réalisable ?

Exercice 39 : Soit h la fonction définie sur $x \in]-100;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{-100x}{x+100}$.

La fonction h permet d'obtenir le taux réciproque, c'est-à-dire que si un nombre évolue de $x\%$ alors une évolution successive de $h(x)\%$ permet de revenir à ce nombre initial.

1. (a) Calculer les images de -20 et 60 par h et interpréter.
   (b) Justifier l'expression de h.
2. **Application :** Le cours du Bitcoin a connu une augmentation de plus de 400% entre les mois de janvier et de mars 2013.
   (a) Quelle somme fallait-il avoir investi en janvier 2013 pour être en possession de 10 000€ en Bitcoin en mars 2013 ?
   (b) Déterminer la fonction permettant d'obtenir la somme en Bitcoin en janvier 2013 en fonction de la somme en Bitcoin en mars 2013 ?