Préparer ma rentrée mathématiques en T$^{\text{le}}$ STI2D

Lycée Robert Doisneau

à Corbeil-Essonnes

1$^{\text{er}}$ Juillet 2022 - 30 Août 2022

Tronc commun

I. Calcul

1) Fraction

Cours :

- Somme ou soustraction :
$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$ $\qquad \dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}=\dfrac{a-c}{b}$ $\qquad$ ✎ Les fractions doivent avoir le même dénominateur
- Produit :
$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$ $\qquad$ ✎ On multiplie numérateur et dénominateur entre eux.
- Quotient :
$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$ $\qquad$ ✎ Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{7}=\dfrac{1\times7}{2\times7}+\dfrac{4\times2}{7\times2}=\dfrac{7+8}{14}=\dfrac{15}{14}$
$\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3\times5}{4\times5}-\dfrac{2\times4}{5\times4}=\dfrac{15-8}{20}=\dfrac{7}{20}$
- $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{2\times6}{3\times5}=\dfrac{2\times2\times3}{3\times5}=\dfrac{4}{5}$
- $\dfrac{3}{8}\div\dfrac{7}{2}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3\times2}{4\times2\times7}=\dfrac{3}{28}$

Exercice 1 : Calculer sans calculatrice et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\dfrac{11}{9}+\dfrac{10}{9}$ $\quad$ b. $\dfrac{15}{17}-\dfrac{6}{17}$ $\quad$ c. $\dfrac{5}{28}-\dfrac{12}{28}$

d. $\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{8}$ $\quad$ e. $\dfrac{7}{3}-\dfrac{5}{4}$ $\quad$ f. $\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{9}$

g. $\dfrac{8}{3}\times\dfrac{7}{16}$ $\quad$ h. $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{2}{7}$ $\quad$ i. $\dfrac{7}{6}+\dfrac{3}{8}$

j. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{8}{3}$ $\quad$ k. $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{9}}$

l. $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{5}}$

2) Puissance

Cours : Soient n et $p\in\mathbb{Z}$ et a et $b\in\mathbb{R}$:

- $a^n\times b^n=(ab)^n$
- $a^n\times a^p=a^{n+p}$
- $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$
- $\dfrac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$
- $(a^n)^p=a^{n\times p}$

Exemple : Décomposer en produit de facteurs premiers :

1. $\dfrac{5^4\times5^3}{5^{-2}}=5^{4+3-(-2)}=5^9$
2. $\dfrac{4^2}{4^5}=4^{2-5}=4^{-3}=(2^2)^{-3}=2^{2\times(-3)}=2^{-6}$
3. $(10^2)^3\times5=10^{2\times3}\times5=(2\times5)^6\times5=2^6\times5^6\times5^1=2^6\times5^7$

Exercice 2 : Décomposer en produit de facteurs premiers :

a. 88

b. 94

c. 175

d. 64^5

e. 27^4

f. 125^7

g. 48×54

h. $75^4 \times 27^8$

i. $30^2 \times 12^3 \times 60^4$

j. $\dfrac{42}{56}$

k. $\dfrac{7^2}{63}$

l. $\dfrac{75^8}{15^4}$

m. $\dfrac{12^5}{3^4 \times 2^{11}}$

n. $\dfrac{36^5}{8^3 \times 27^4}$

o. $8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^2}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2$

p. $9 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{5 \times 2^2}{(3^2 \times 2)^4}$

3) Développer, Factoriser, Identité remarquable

Cours :

✎ Développer une expression algébrique c'est transformer un produit en une somme ou une différence

✎ Factoriser une expression algébrique c'est transformer une somme ou une différence en un produit

- Simple distributivité ou facteur commun :

$$k(a+b) \underset{Factoriser}{\overset{Développer}{\rightleftarrows}} k \times a + k \times b$$

- Double distributivité : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

- Identité remarquable :

$$\begin{array}{rcl} (a-b)(a+b) & \overset{Développer}{\rightleftarrows} & a^2 - b^2 \\ (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 & \underset{Factoriser}{=} & a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

a) *Développer*

Exemple :

⋆ Simple distributivité : $2(3x-5) = 2 \times 3x - 2 \times 5 = 6x - 10$

⋆ Double distributivité :
$(3+x)(-x+7) = 3 \times (-x) + 3 \times 7 + x \times (-x) + x \times 7 = -3x + 21 - x^2 + 7x = -x^2 + 4x + 21$

⋆ Identité remarquable :
$(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
$(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$

Exercice 3 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la distributivité.

a. $2 \times (a+4)$

b. $-4 \times (6-x)$

c. $(11x-7) \times 5$

d. $10 \times (5a-3)$

e. $(-3x+8) \times (-7)$

f. $5 \times (5x^2 - 3x + 4)$

g. $b \times (20 - 2b)$

h. $(71x - 41) \times x$

i. $(2x^2 - 5x + 6) \times (-4x)$

j. $12 \times \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{3}\right)$

Exercice 4 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la double distributivité.

a. $(2x+1)(3x-4)$
b. $(x^2+3)(1-3x)$
c. $(3a+2)(-a-5)$
d. $(a-2)(a+2)$
e. $(5x-1)(3+x)$
f. $(8x+24)\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8}\right)$

Exercice 5 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

a. $(a+5)^2$
b. $(9-b)^2$
c. $(x+7)^2$
d. $(10-x)(10+x)$
e. $(8x-6)^2$
f. $(11+3x)^2$
g. $(3-2x)^2$
h. $(2x-3)^2$

b) Factoriser

Exemple :

- ⋆ Facteur commun : $3x+18 = 3\times x + 3\times 6 = 3(x+6)$
- ⋆ Identité remarquable :
  $x^2-25 = x^2-5^2 = (x-5)(x+5)$
  $x^2+4x+4 = x^2+2\times x\times 2+2^2 = (x+2)^2$
  $x^2-12x+36 = x^2-2\times x\times 6+6^2 = (x-6)^2$

Exercice 6 : Factoriser et réduire les expressions suivantes.

a. $3x+6$
b. $5x^2+3x$
c. $7x-49x^2$
d. x^2-5x
e. $(7x-4)(10x+1)-(-3x+7)(7x-4)$

Exercice 7 : Factoriser et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

a. x^2-25
b. x^2-6x+9
c. $25x^2-20x+4$
d. x^2-100
e. $9x^2+12x+4$
f. $9x^2+18x+9$
g. $121x^2+220x+100$
h. $144-16x^2$
i. $1-25x^2$

4) Taux d'évolution : augmentation et diminution

Cours :

✎ Faire évoluer une quantité d'un taux t, correspond à **multiplier** cette valeur par son coefficient multiplicateur noté CM
$$CM = 1+t$$

✎ Une grandeur évolue d'une valeur initiale ν_0 vers une valeur finale ν_1 avec pour coefficient multiplicateur CM , alors :
$$\nu_1 = \nu_0 \times CM$$

Exemple :

1. Lors d'une diminution de 10% le taux vaut $t = \dfrac{-10}{100} = -0,10$ donc le coefficient multiplicateur est $CM = 1+t = 1-0,10 = 0,9$
2. Lors d'une augmentation de 3% le taux vaut $t = \dfrac{3}{100} = 0,03$ donc le coefficient multiplicateur est $CM = 1+t = 1+0,03 = 1,03$
3. Le taux correspond à un $CM = 1,45$ est $t = CM-1 = 0,45$ soit une évolution de 45% (augmentation)

4. Le taux correspond à un $CM = 0,82$ est $t = CM - 1 = -0,18$ soit une évolution de -18% (diminution)

5. Un article à 60€ diminue de 5% cela revient à multiplier par $CM = 1 - 0,05 = 0,95$.
   Le prix après réduction est donc de $60 \times 0,95 = 57$€.

   L'article subit une deuxième réduction de 5% après les deux réductions il vaut alors :
   $60 \times 0,95 \times 0,95 = 60 \times 0,,95^2 = 54,15$€.

Exercice 8 : Donner le coefficient multiplicateur correspondant à ces évolutions .

a. Augmentation de 2%
b. Augmentation de 67%
c. Diminution de 75%
d. Augmentation de 33%
e. Diminution de 5%
f. Diminution de 43%

Exercice 9 : Donner le taux puis le pourcentage d'évolution correspond au CM suivant :

a. $CM = 1,62$
b. $CM = 1,8$
c. $CM = 0,40$
d. $CM = 0,27$
e. $CM = 1,59$
f. $CM = 0,2$
g. $CM = 3$

Exercice 10 :

a. Un téléviseur coûte 450€ . Son prix augmente de 10%. Calculer la valeur finale.

b. Un pull coûte 30 € . Lors des soldes il y a une réduction de 30% dessus. Quel est le coefficient multiplicateur ? Calculer la valeur finale à partir du CM.

c. Diminuer un prix de 12%, revient à multiplier ce prix par ?

d. Augmenter un prix de 37% revient à multiplier par ?

Exercice 11 : Adnan fabrique des portes-clés. En janvier, il fabrique 300 porte-clés et les stocke. Il décide d'augmenter sa production de 12% tous les mois.

a. Quelle sera sa production de porte-clés en février ?

b. Quelle sera sa production de porte-clés en mars ?

c. Déterminer à partir de quand la production dépassera 700 portes-clés. Préciser à l'aide de la calculatrice.

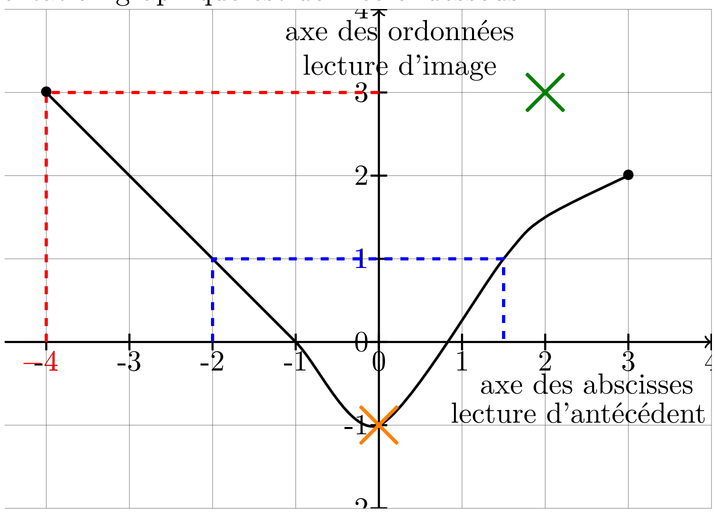
II. Fonction et représentation graphique

Cours : ✎ Une fonction est un processus qui, à chaque valeur du nombre x, associe un unique nombre y, noté $f(x)$, appelé l'image de x par f. On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

✎ On dit que x est un antécédent de y par f lorsque $y = f(x)$.

✎ La représentation graphique de f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.

Exemple : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



- L'image de -4 par f est 3 on a $f(-4) = 3$
- 1 a deux antécédents -2 et $1,5$ car : $f(-2) = 1$ et $f(1,5) = 1$
- Le point $(0;-1)$ appartient à la courbe représentative de f car $f(0) = -1$.
- Le point $(2;3)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f car $f(2) = 1,5 \neq 3$.

- Son tableau de variations est

x	-4		0		3
Variations de f	3	↘	-1	↗	2

Abscisses où l'on change de variation

Ordonnées où l'on change de variation

- Son tableau de signe est

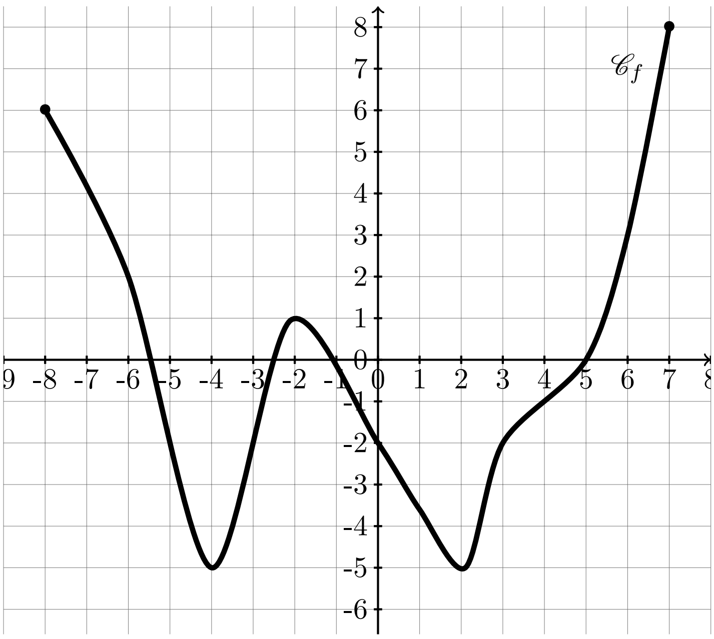
x	-4		-1		1		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Abscisses où l'on change de signe

Courbe au dessus (+) ou en dessous (-) de l'axe des abscisses

1) Variations de fonction, lecture d'image, d'antécédent, point sur courbe et signe

Exercice 12 : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f
2. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f.

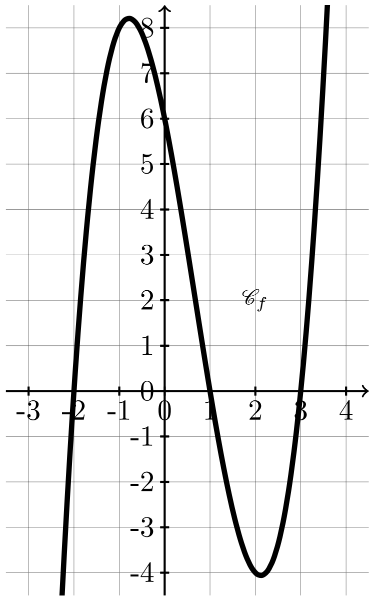
   a. 6   b. -6   c. -8   d. -4   e. -2   f. 0   g. 3

3. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants

   a. -2   b. 0   c. 8   d. -5

4. A (0 ;-2) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
5. B (2 ;-6) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
6. Dresser le tableau de variation de f

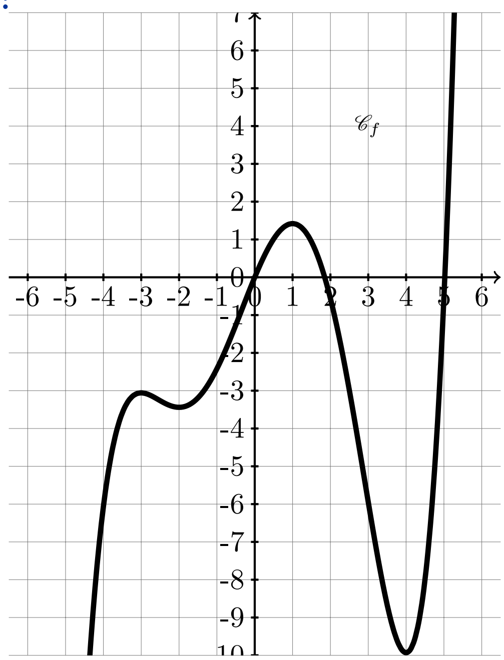
Exercice 13 :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est données ci-contre.

1. Déterminer graphiquement l'image de -2 par la la fonction f.
2. Déterminer graphiquement l'image de 2 par la la fonction f.
3. Donner un nombre ayant exactement 2 antécédents par la fonction f.
4. Graphiquement dresser le tableau de signe de la fonction f

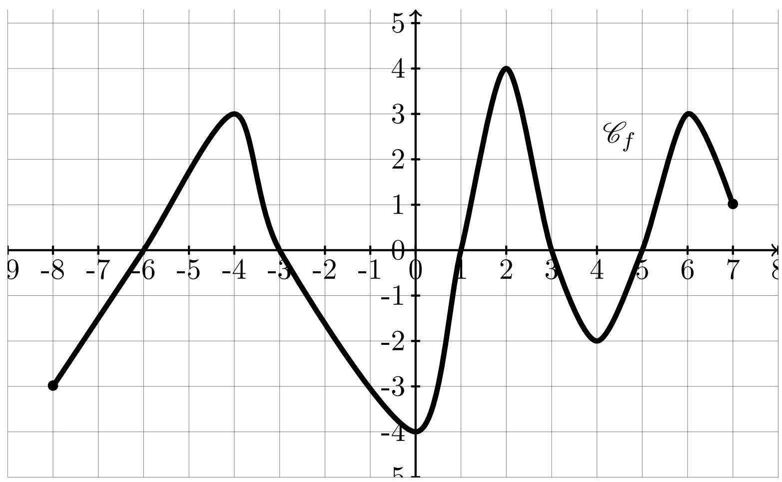
Exercice 14 :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est données ci-contre.

1. Déterminer graphiquement l'image de 4 par f.
2. Dresser le tableau de variation de f

Exercice 15 : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f
2. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f.
   a. -8 b. -4 c. 0 d. 2
3. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants
   a. 4 b. 1 c. -3
4. Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{C}_f$?
   a. A(-4 ;-5) b. B(-3 ;1) c. C(1 ;5) d. D(3 ;-2) e. E(1 ;-2) f. F(7,8)
5. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) Affine : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Cours : ✎ f est une **fonction affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = mx + p$$

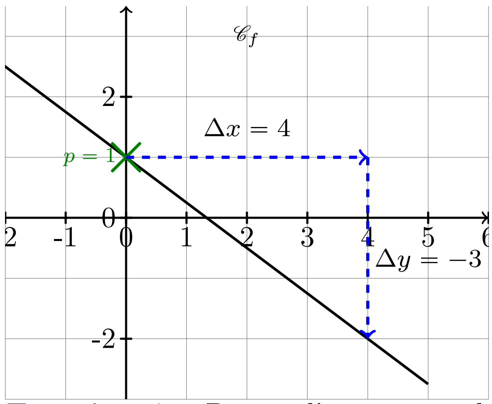
✎ m est appelé coefficient directeur. Pour tout $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B) \in \mathcal{C}_f$ alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

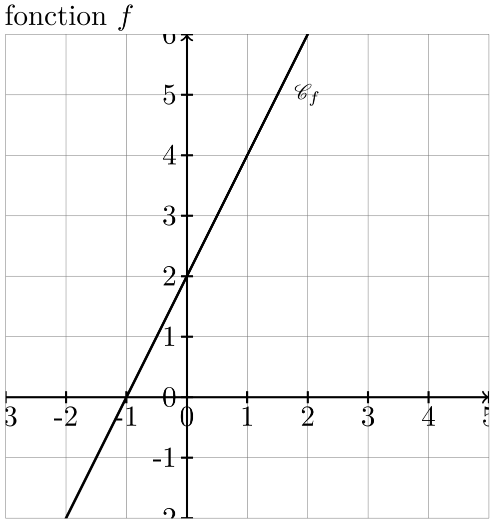
✎ p est appelé l'ordonnée à l'origine. En effet le point $P \in \mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = 0$ a pour ordonnée $f(0) = m \times 0 + p = p$. Donc $P(0; p)$

Exemple : Donner l'expression algébrique de la fonction f dont sa courbe est donnée ci-contre.

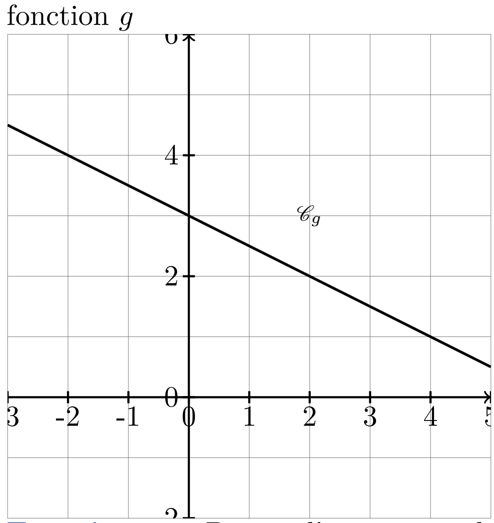
- $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{4}$
- $p = 1$
- Ainsi $f(x) = \dfrac{-3}{4}x + 1$



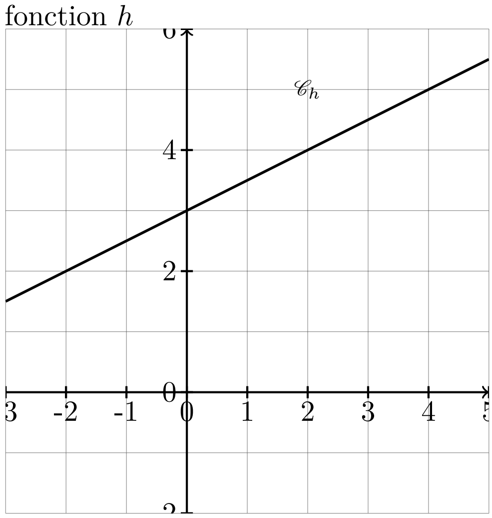
Exercice 16 : Donner l'expression algébrique de la fonction f



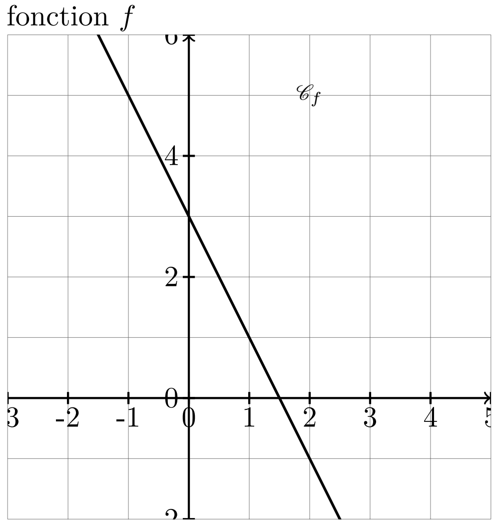
Exercice 17 : Donner l'expression algébrique de la fonction g



Exercice 18 : Donner l'expression algébrique de la fonction h

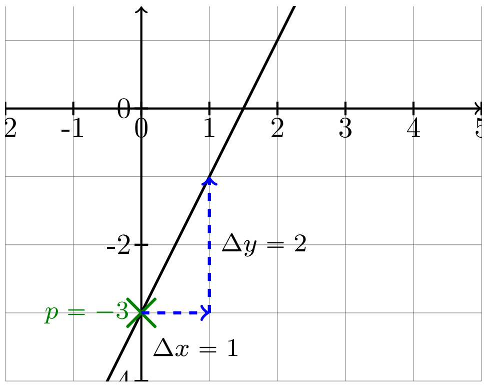


Exercice 19 : Donner l'expression algébrique de la fonction f



Exemple :
Tracer la courbe de la fonction $f(x) = 2x - 3$

- $m = 2 = \dfrac{2}{1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- $p = -3$



Exercice 20 : Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{6}x - 2$ b. $g : x \longmapsto 2x + 4$ c. $h : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x - 1$

III. Fonction : calcul algébrique

1) Image, antécédent et point sur la courbe

Exemple : Soit $f(x) = -4x + 7$
Par le calculer déterminer

1. l'image de 3 par la fonction f :
   - ⋆ l'image de 3 est $f(3)$ qu'on calcule en remplaçant x par 3 dans l'expression de f :

   $$f(3) = -4 \times 3 + 7 = -12 + 7 = -5$$

   Donc $f(3) = -5$ ainsi l'image de 3 est -5

2. le(s) antécédent(s) de -1 par la fonction f :
   - ⋆ on cherche le(s) valeur(s) de x (antécédent) telle(s) que

   $$\begin{array}{rcl} f(x) &=& -1 \\ -4x+7 &=& -1 \end{array}$$

   On résout l'équation

   $$\begin{array}{crclc} & -4x+7 &=& -1 & \\ \xrightarrow{-7} & -4x &=& -8 & \xleftarrow{-7} \\ \xrightarrow{\div(-4)} & x &=& \dfrac{-8}{-4} & \xleftarrow{\div(-4)} \\ & x &=& 2 & \end{array}$$

   Ainsi 2 est l'antécédent de -1 par la fonction f.
   Il n'y en a qu'un car on a trouvé une seule solution à l'équation. On a $f(2) = -1$

3. le point $A(1; 3)$ appartient-il à la courbe de f ?
   - ⋆

4. Le point $A(-2; 1)$ appartient-il à la courbe de f ?
   - ⋆ On doit vérifier que l'ordonnée de A : 1 est bien l'image de son abscisse -2

   $f(-2) = -4 \times (-2) + 7 = 8 + 7 = 13 \neq 1$ donc A n'est pas sur la courbe.

Exercice 21 : Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 1 \ ; \qquad g(x) = -2x + 5 \ ; \qquad h(x) = 3x^2 - x + 10$$

1. Déterminer, par le calcul, les images suivantes :

   (a) $f(2) =$
   (b) $g(-1) =$
   (c) $h(0) =$
   (d) $f\left(-\frac{1}{6}\right) =$
   (e) $g(0) =$
   (f) $h(5) =$

2. Déterminer par le calcul :

   (a) le(s) antécédent(s) de 4 par la fonction f
   (b) le(s) antécédent(s) de -1 par la fonction g
   (c) le(s) antécédent(s) de 0 par la fonction g
   (d) le(s) antécédent(s) de $-\frac{1}{2}$ par la fonction g

Exercice 22 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -5x + 2$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de 3 par la fonction h.
2. Calculer si il existe le ou les antécédents de -8 par la fonction h.
3. Le point $E(-1; -3)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.
4. Le point G appartient à $\mathcal{C}_h$ et son ordonnée est 1. Quelle est son abscisse ? Justifier.
5. En quel point la courbe $\mathcal{C}_h$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Justifier.

2) Fonction dérivée et nombre dérivé

Cours : Soit f une fonction, on note f' sa dérivée

- ✎ Si $f(x) = a$ (avec a un réel) alors $f'(x) = 0$
- ✎ Si $f(x) = x$ alors $f'(x) = 1$
- ✎ Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$
- ✎ Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$

Règle de dérivation :

- Si $f(x) = u(x) + \nu(x)$ alors $f'(x) = u'(x) + \nu'(x)$
- Si $f(x) = k \times u(x)$ alors $f'(x) = k \times u'(x)$

Exemple : Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x$ alors $f(x) = 3 \times x$ de la forme $k \times u(x)$ avec $u(x) = x$ alors $u'(x) = 1$ ainsi :
   $f'(x) = k \times u'(x) = 3 \times 1 = 3$
2. $f(x) = x^3 + x$. C'est une somme, on dérive chaque terme de la somme ce qui donne :
   $f'(x) = 3x^2 + 1$
3. $f(x) = -5x^2$ alors $f(x) = -5 \times x^2$ de la forme $k \times u(x)$ avec $u(x) = x^2$ alors $u'(x) = 2x$ ainsi :
   $f'(x) = k \times u'(x) = -5 \times 2x = -10x$
4. $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 100$
   $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 5 \times 1 - 0 = 12x^2 - 14x + 5$

Exercice 23 : Calculer les fonctions dérivées de :

1. $f(x) = -6x + 1$
2. $f(x) = 3 + 4x$
3. $f(x) = x^2 - 4x - 1$
4. $f(x) = 18 - 25x^2 + 6x^3$
5. $f(x) = x^2 + 3$
6. $f(x) = 4x^3 + 2x - 5$
7. $f(x) = (3x + 1)(4x - 1)$

3) Etude de signe

Cours :

✎ Etude de signe de la forme $mx + p$

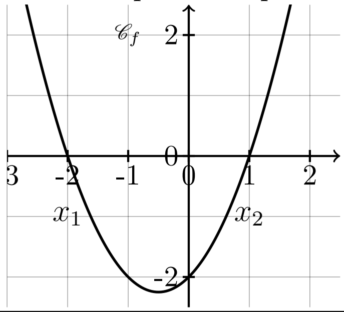
- ⋆ On résout $mx + p = 0$ on trouve une solution x_0
- ⋆

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $mx + p$		signe opposé de m	0	signe de m	

✎ Etude de signe de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$

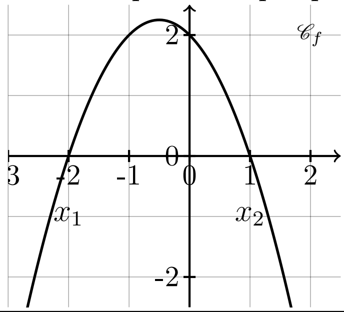
- ⋆ On identifie x_1 et x_2. On prend le plus petit des deux, ici on dira que $x_1 < x_2$
- ⋆

Si $a > 0$ alors parabole qui "sourit"



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$ alors parabole qui "pleure"



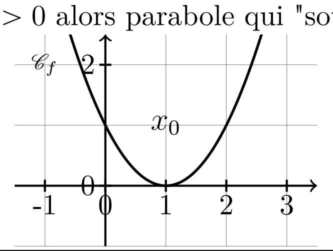
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe de a toujours à l'extérieur des racines, aux extrémités.

✎ Etude de signe de la forme $a(x - x_0)^2$

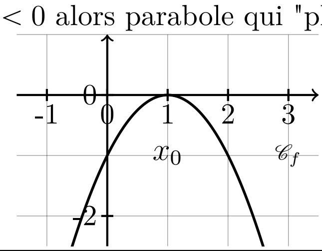
- ⋆ On identifie x_0
- ⋆

Si $a > 0$ alors parabole qui "sourit"



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $a(x - x_0)^2$		$+$	0	$+$	

Si $a < 0$ alors parabole qui "pleure"



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $a(x - x_0)^2$		$-$	0	$-$	

Signe de a toujours aux extrémités.

Exemple : 1. Dresser le tableau de signe de $f(x) = -2x + 7$:

⋆ On résout $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -2x+7 &= 0 \\ -2x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

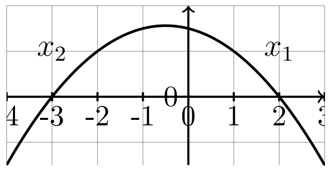
⋆ On a $m = -2 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

2. Dresser le tableau de signe de $f(x) = -2(x-2)(x+3)$:

   - ⋆ De la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$. On identifie x_1 et x_2 : $f(x) = -2(x-2)(x-(-3))$ ainsi $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$ et $-3 < 2$
   - ⋆ $a = -2 < 0$ donc la parabole "pleure" (signe de a à l'extérieur des racines, aux extrémités)

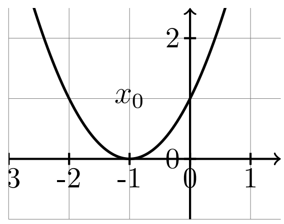
x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



3. Dresser le tableau de signe de $f(x) = 3(x+1)^2$:

   - ⋆ De la forme $a(x-x_0)^2$. On identifie x_0 : $f(x) = 3(x-(-1))^2$ ainsi $x_0 = -1$
   - ⋆ $a = 3 > 0$ donc la parabole "sourit" (signe de a aux extrémités)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	



Exercice 24 : Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x + 3$
2. $f(x) = -4x + 12$
3. $f(x) = -3x - 21$
4. $f(x) = 6x + 18$
5. $f(x) = x^2 + 3$
6. $f(x) = 3(x-4)(x+3)$
7. $f(x) = -4(x+5)(x+3)$
8. $f(x) = 5x(x-4)$
9. $f(x) = 3(x+2)^2$
10. $f(x) = -2(x+7)^2$

4) Tableau de variation

Cours : On considère une fonction f et sa dérivée f' définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

✎ f est croissante si et seulement si $f'(x)$ est positive

✎ f est décroissante si et seulement si $f'(x)$ est négative

Exemple : On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 12x + 1\,000$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Calculer la dérivée de f
2. Etudier le signe de $f'(x)$
3. En déduire les variations de f

Corrigé :

1. $f'(x) = 3\times 2x - 12\times 1 + 0 = 6x - 12$

2. $f'(x)$ est une fonction affine,

On cherche les valeurs de x telles que $f(x) > 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & > & 0 \\ 6x - 12 & > & 0 \\ 6x & > & 12 \qquad \text{on divise par } 6 > 0 \\ x & > & \dfrac{12}{6} = 2 \end{array}$$

On résume sous forme de tableau de signe :
(cohérent car $m = 6 > 0$)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	988	$\nearrow$	

On a $f(x) = 3x^2 - 12x + 1\,000$ calculons $f(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 1\,000 = 988$

3. Voir tableau ci-dessus.

Exercice 25 : On considère la fonction $f(x) = 7x^2 + 7x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Calculer la dérivée de f
2. Etudier le signe de $f'(x)$
3. En déduire les variations de f

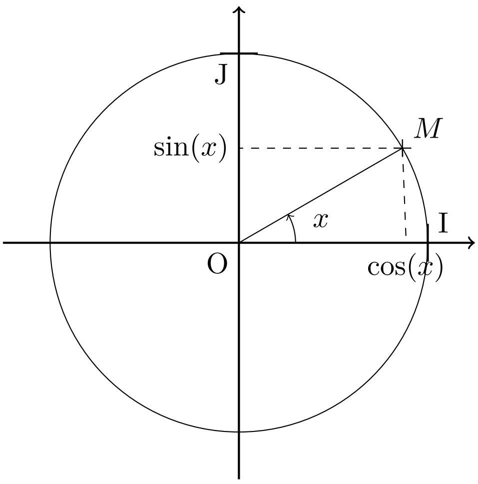
Exercice 26 : On considère la fonction $g(x) = -15x^2 + 90x - 18$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Calculer la dérivée de g
2. Etudier le signe de $g'(x)$
3. En déduire les variations de g

Spécialité

I. Trigonométrie

Cours :



✎ Cercle trigonométrique :

✎ Angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Exercice 27 : Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

a) $\frac{7\pi}{3}$ b) $-\frac{11\pi}{6}$ c) $\frac{15\pi}{2}$ d) $\frac{26\pi}{4}$ e) $-\frac{13\pi}{5}$

Exercice 28 : Déterminer les valeurs exacts de :

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

II. Produit scalaire

Cours :

✎ Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

✎ Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

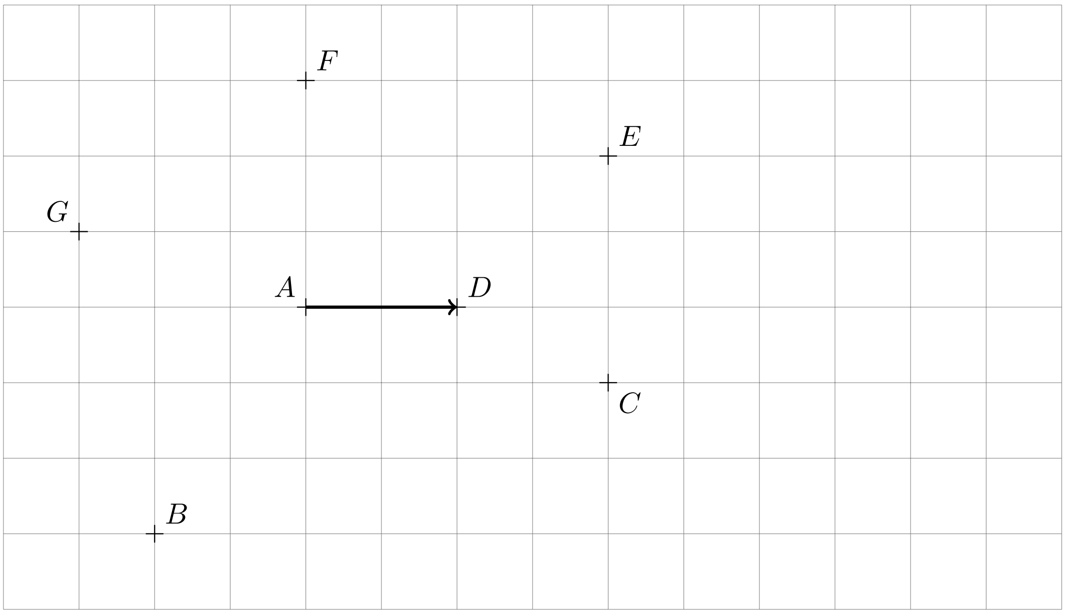
Exercice 29 :

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ avec $\|\overrightarrow{u}\| = 7$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 2$.
   (a) dans le cas où l'angle $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$
   (b) dans le cas où l'angle $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 30°$
2. Dans le repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   (b) Calculer une mesure le l'angle $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ à 1 degrés près.

Exercice 30 : L'unité de longueur est le carreau.

Calculer :

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$
4. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD}$
5. $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$



III. Nombres complexes

Cours :

- ✎ L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$
- ✎ la forme algébrique d'un nombre complexe est $z = x + \mathrm{i}y$ avec :
  - x la partie réelle de z
  - y la partie imaginaire de z
- ✎ le conjugué du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est : $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$
- ✎ Le module est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ✎ La forme trigonométrique est $z = |z|\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$

Exercice 31 : Soit les nombres complexes $z = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z' = -4 - \mathrm{i}$. Ecrire les nombre suivants sous la forme algébrique.

a) $z + z'$ c) $z \times z'$ e) $(3 + z)(4 - z')$ g) $\frac{z}{z'}$ i) $\frac{1+z}{2-z'}$

b) $2z + 3z'$ d) z'^2 f) $\frac{1}{z}$ h) $\frac{1}{z^2}$ j) $\frac{\mathrm{i}z}{i+z'}$

Exercice 32 : Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a) $z = -1 + \mathrm{i}$ c) $z = -7\mathrm{i}$ e) $z = 2 + 2\mathrm{i}$

b) $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ d) $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ f) $z = -4$

Exercice 33 : Déterminer la forme algébrique des nombre complexes z suivant de module $|z|$ et d'argument θ

a) $|z| = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$ c) $|z| = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{-\pi}{3}$ e) $|z| = 5$ et $\theta = \frac{7\pi}{3}$

b) $|z| = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ d) $|z| = 1$ et $\theta = -\pi$ f) $|z| = 2$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$

IV. Dérivées

Cours :

✎ Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.

✎ L'équation de la tangente est $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$

✎

Nom	Ensemble de définition	Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f')
Constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
Linéaire	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
Polynôme	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}$
Cosinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
Sinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

✎

Opérations	Fonction	Dérivée
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Différence	$u - v$	$u' - v'$
Produit par un réel	ku	ku'
Produit	$u \times v$	$u'v + uv'$
Inverse	$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
g définie par	$g(x) = f(ax+b)$	$g'(x) = af('(ax+b)$
f définie par	$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \phi)$
f définie par	$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \phi)$

Exercice 34 : Calculer la fonction dérivée f' des fonctions f suivantes sur l'intervalle I.

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{2}x^6 - x + 2$ et $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ et $I = \mathbb{R}^*$
4. $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \sqrt{2}$ et $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = x^2 + 2X + 3$ et $I = \mathbb{R}_+^*$
6. $f(x) = \frac{x^2+5x-7}{4}$ et $I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x^2+56X+1}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 35 : Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur sur l'intervalle I :

a) $f(x) = x^3 - 3x + 8$, $I = \mathbb{R}$, $a = 2$

b) $f(x) = (2x+1)(3-4x)$, $I = \mathbb{R}$, $a = 1$

c) $f(x) = \frac{2x+6}{1-3x}$, $I = \mathbb{R}/\}\frac{1}{3}\{$, $a = -2$

d) $f(x) = (x+2)^2(x-1)$, $I = \mathbb{R}$, $a = 0$

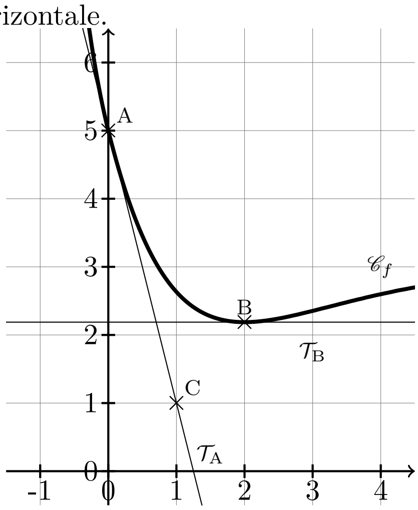
1. Dresser le tableau de variations.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a.

Exercice 36 : On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.

On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A $(0\,;\,5)$ et par le point B d' abscisse 2.

La tangente $\mathcal{T}_\text{A}$ Ã la courbe au point A passe par le point C$(1\,;\,1)$ et la tangente $\mathcal{T}_\text{B}$ au point B est horizontale.



1. Déterminer graphiquement la valeur de $f(0)$
2. Déterminer graphiquement la valeur de $f'(0)$
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_\text{A}$
4. Déterminer graphiquement la valeur de $f'(2)$

V. Primitives

Cours :

Ensemble de définition	Fonction f	Une primitive F
$\mathbb{R}$	$f(x) = c$	$F(x) = cx$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax$	$F(x) = \frac{a}{2}x^2$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$	$F(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$
$\mathbb{R}$	$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$	$F(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi)$

Exercice 37 : Déterminer une primitive des chaque fonction suivante :

$f(x) = 2x + 4$

$f(x) = 3^3x + 4x^2 - 9$

$f(x) = \sin(x) - 1$

$f(x) = x^2 + 6x$

$f(x) = \cos(x) + 3x$

$f(x) = 5\cos(2x - 3)$